

## Meccanica Razionale e Analitica

20/9/05

### USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

#### Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 + 2xy) dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^2([0, 1]), y(0) = 0, y'(0) = 0, \\ y(1) = 1, y'(1) = 0\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

#### Secondo Esercizio

In un piano verticale è fissato il riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  con asse  $y$  verticale discendente e versori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ . Un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  ha il diametro  $AB$  vincolato a scorrere su un' asta liscia di massa trascurabile e versore  $\mathbf{r}$  libera di ruotare nel piano verticale attorno a un suo punto fisso  $O$  (vedi Figura 1). Il centro  $C$  del disco è inoltre attratto da una molla di costante elastica  $K$  verso un punto fisso  $D$  posto sull'asse  $Ox$  di coordinate  $(d, 0)$ . Si assumano come parametri lagrangiani del sistema l'angolo  $\theta$  formato dai versori  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{i}$  e la distanza con segno  $s$  di  $C$  da  $O$ .

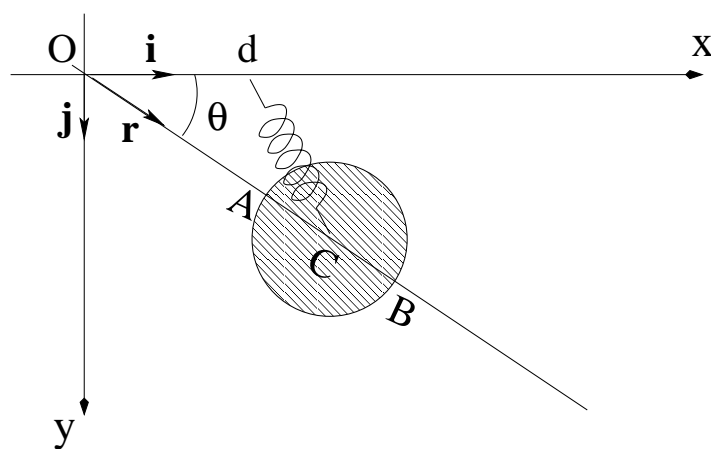


Figura 1

- (1) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- (2) Trovare le equazioni di Lagrange.
- (3) Ritrovare le equazioni di moto tramite le equazioni cardinali.

### Terzo Esercizio

In un piano verticale si consideri il sistema meccanico costituito da tre corpi puntiformi  $A$ ,  $B$  e  $C$  di uguale massa  $m$ , vincolati da due sbarrette di massa trascurabile e di ugual lunghezza  $\ell$  che collegano rispettivamente le coppie di punti  $\{A, B\}$  e  $\{B, C\}$ . I corpi  $A$  e  $C$  sono inoltre vincolati a muoversi lungo una guida rettilinea, inclinata di un angolo costante  $\alpha \in ]0, \pi/2[$  rispetto alla direzione orizzontale (vedi Figura 2) e su  $A$  agisce una forza elastica attrattiva di costante  $k > 0$  centrata in un punto  $O$  della guida (si consiglia di assumere  $O$  come origine del sistema di riferimento). Tutti i vincoli sono lisci.

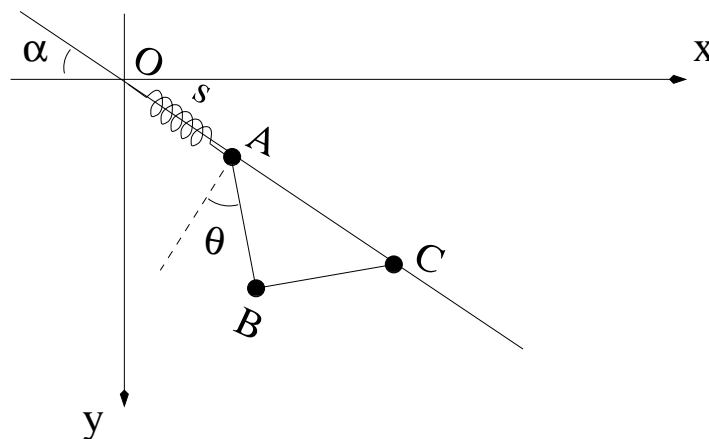


Figura 2

- (1) Utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del corpo  $A$  lungo la guida, con origine in  $O$ , e l'angolo  $\theta$  (supposto crescente in verso antiorario) che il segmento  $AB$  forma con la direzione normale alla guida scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema;
- (2) calcolare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;
- (3) scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

## Prova al Calcolatore

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2K}{M}x = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

(b) Tracciare il grafico della curva

$$x = \frac{3}{2}(\cos(t))^3, \quad y = 3(\sin(t))^3, \quad t \in [0, 2\pi]$$

e calcolarne la lunghezza.