Meccanica Razionale e Analitica

24/6/05

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Discutere se il funzionale

$$\int_0^1 (\cosh y)^2 y'^2 dx$$

ha estremali spezzati. Trovare l'estremale regolare del funzionale che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Secondo Esercizio

In un piano verticale riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy con asse y verticale ascendente sono posti due dischi di egual massa M e ugual raggio R vincolati a rotolare senza strisciare sull'asse x. Fra i centri O_1 e O_2 dei dischi agisce una forza elastica attrattiva di costante K. Su O_1 e O_2 sono imperniate le estremità di due aste di egual massa m ed egual lunghezza $2L$ poste nello stesso piano verticale dei dischi ed incernierate fra di loro negli altri due estremi. Supposti tutti i vincoli privi di attrito, si scelgano come parametri lagrangiani l' ascissa x del punto O_1 e l' angolo θ che l'asta imperniata in O_1 forma con l'asse x. Scrivere la lagrangiana del sistema.

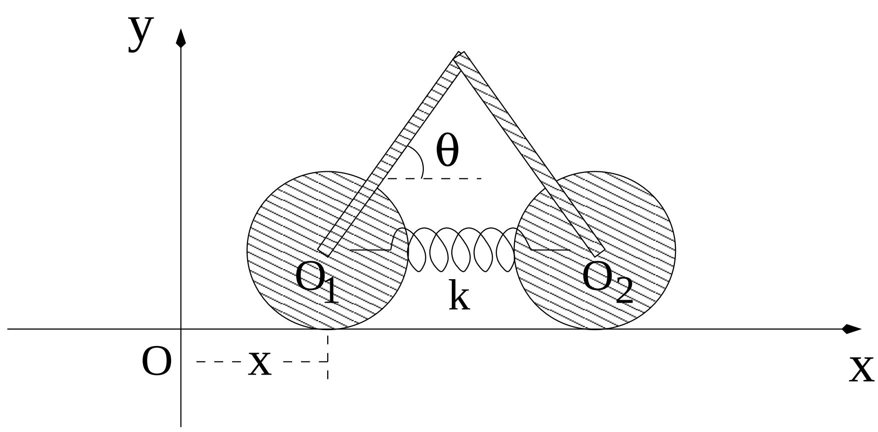

Figura 1

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico costituito da due aste omogenee, di massa m e lunghezza 2ℓ, vincolate a muoversi in un piano verticale in cui è assegnato un sistema di riferimento Oxy con asse y verticale ascendente.
Le due aste sono incernierate nell'estremo C e gli estremi A e B sono liberi di scorrere lungo l'asse x. Tutti i vincoli sono lisci.
Sul sistema agiscono la forza di gravità e due forze elastiche generate da due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla: una molla collega l'origine del riferimento O all'estremo A, mentre l'altra collega tra loro i due baricentri G ed H delle aste (vedi Figura 2).

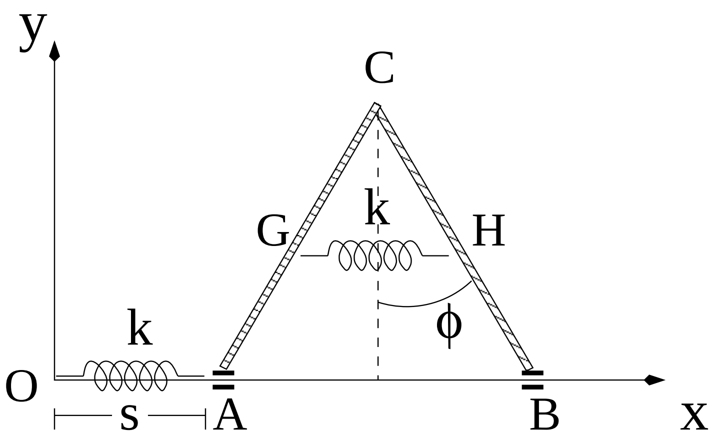

Figura 2

(1) Utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa s dell'estremo A e l'angolo ϕ che l'asta BC forma con la direzione verticale (supposto crescente in verso antiorario), determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema al variare del parametro $J = \frac{mg}{2k\ell}$;
(2) trovare per quali valori di $J \neq 1$ la configurazione di equilibrio $(s, \phi) = (0, 0)$ è stabile e determinare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad essa assumendo che $J = \frac{2}{3}$ e che $\ell = \frac{1}{2}$.

Prova al Calcolatore

(a) Ritrovare l'estremale del primo esercizio tramite MAPLE.

(b) Data la matrice

$$A = [[0, 2, -1], [0, 1, -1], [-1, -2, 0]]$$

trovare la matrice e^{At}. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = (8, 0, 0)^T\ .$$