

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

21 Febbraio 2006

Esercizio 1: Data l'equazione alle differenze finite

$$x_{k+1} = 2x_k - 2x_{k-1}$$

scrivere in forma esplicita la soluzione con condizioni iniziali $x_0 = 0, x_1 = 1$.

Esercizio 2: Dato il potenziale

$$U(x, y) = \arctg(x^2 - 1) \arctg(1 - y^2)$$

si consideri il sistema dinamico gradiente

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y} .$$

- si trovino i punti di equilibrio, se ne calcoli la linearizzazione e se ne studi la stabilità e/o la stabilità asintotica;
- si dimostri che il quadrato aperto $|x| < 1, |y| < 1$ è positivamente invariante;
- si dimostri che le rette $x = 0, y = 0, y = x$ e $y = -x$ sono invarianti;
- si tracci un disegno qualitativo delle orbite nel piano (x, y) ;
- si dimostri che la curva $x = 0$ non è una separatrice.

Esercizio 3: Consideriamo un punto materiale di massa m vincolato a muoversi sulla circonferenza

$$\begin{cases} r = S + R \cos q \\ z = R \sin q \end{cases}$$

con S, R costanti, $S > R$, fatta ruotare attorno all'asse z con velocità angolare costante ω . Sul punto materiale non agisce alcuna forza esterna.

- Si scrivano la lagrangiana, la hamiltoniana e le equazioni di Hamilton, l'energia totale;
- si trovino i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e se ne discuta la stabilità.