

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

19 Settembre 2007

**Esercizio 1:** Si studi il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r-1) - ry \\ \dot{y} = xr + y(r-1) \end{cases}$$

dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . In particolare

- si trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità;
- si trovi la soluzione generale esplicita del sistema (*suggerimento*: si risolva il sistema corrispondente per le coordinate polari  $r, \theta$  definite da  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ).

**Esercizio 2:** Dato il sistema dinamico discreto in  $\mathbf{R}^2$

$$X_{k+1} = A X_k + B; \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

con  $x_0, y_0, \alpha, \beta$  parametri reali assegnati, se ne trovi la soluzione generale.

**Esercizio 3:** Si completi la relazione

$$w(p, q) = \arctan(p + q)$$

ad una trasformazione canonica  $\mathbf{R}^2 \ni (p, q) \mapsto (w, z) \in \mathbf{R}^2$  e si utilizzi tale trasformazione per trovare la soluzione generale del sistema di equazioni di Hamilton con Hamiltoniana  $H(p, q) = q[1 + (p + q)^2]$ .