

Compito di Meccanica Razionale e Analitica

12 Settembre 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo D di massa m e raggio r vincolato a rotolare senza strisciare su una guida circolare di raggio R posta in un piano orizzontale. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ tale che la guida giaccia nel piano xy e sia centrata in O . Il disco D è vincolato a mantenersi ortogonale al piano xy e la normale al disco è sempre parallela alla direzione definita dall'origine O e dal punto di contatto P tra disco e guida (vedi Figura 1).

Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che OP forma con l'asse x scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione di Lagrange.

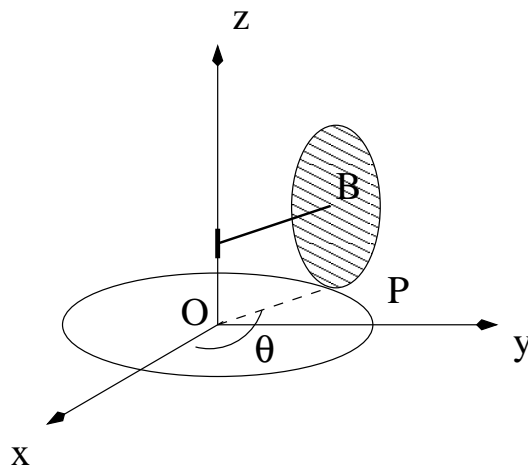


Figura 1

Secondo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da due dischi omogenei D_1 , D_2 di masse M , m e raggi R , r rispettivamente. Il disco D_1 è vincolato a ruotare attorno ad un punto O in un piano orizzontale. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ tale che D_1 giaccia nel piano xy . Il disco D_2 è vincolato a mantenersi ortogonale al piano xy e la normale al disco è sempre parallela alla direzione di OP , dove P è il punto di contatto tra D_1 e D_2 (vedi Figura 2). Inoltre i due dischi rotolano l'uno sull'altro senza strisciare.

Usando come coordinate lagrangiane gli angoli θ , ϕ , che OP ed un raggio fisso OQ di D_1 formano con l'asse x ,

- scrivere la lagrangiana del sistema;
- trovare gli integrali primi del sistema.

Si consideri adesso il caso in cui $M = 2m$, $R = 2r$.

- Trovare tutti i moti con $\theta(t) \equiv 0$, $\phi(t) \neq 0$.

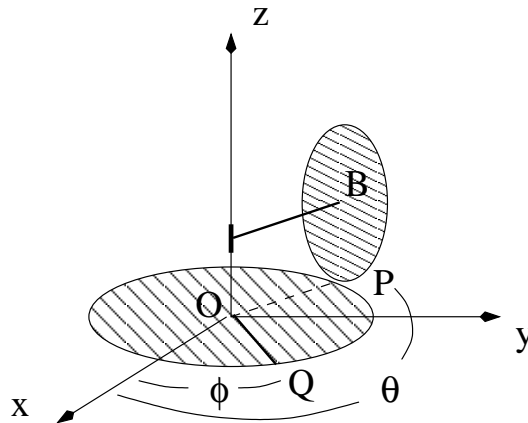


Figura 2

Terzo Esercizio

Il sistema meccanico in Figura 3, posto in un piano verticale, è costituito da:

- un'asta omogenea AD di massa $3m$ e lunghezza 3ℓ con l'estremo A vincolato a muoversi sull'asse X ed il punto C, distante 2ℓ da A, vincolato a scorrere sull'asse Y;
- un'asta omogenea OB di massa m e lunghezza ℓ incernierata nell'origine O e nel punto B dell'asta AD a distanza ℓ da A;
- una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che collega l'estremo A della prima asta con l'origine.

Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione costante g .

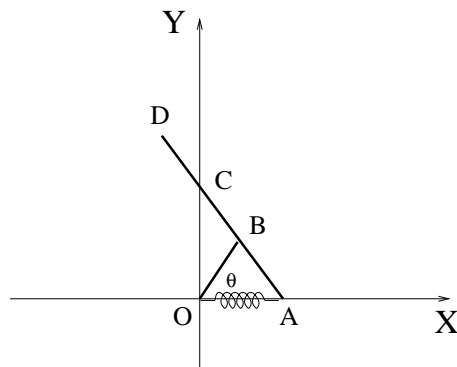


Figura 3

Prendendo come parametro lagrangiano l'angolo θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) che l'asta OB forma con l'asse X

- 1) trovare le posizioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha = \frac{mg}{k\ell} \neq \frac{4}{5}$;
- 2) nel caso $\alpha = 1$ determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.