

## Compito parziale di Meccanica Razionale e Analitica

30 Maggio 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

### Primo Esercizio

Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato alla superficie parametrica  $\Sigma$  definita da

$$x = (2 + \cos u) \cos \theta; \quad y = (2 + \cos u) \sin \theta; \quad z = u$$

con  $u \in \mathbb{R}, \theta \in S^1$ . Si assuma che sul punto non agiscano forze attive e che la superficie sia liscia.

- i) scrivere la lagrangiana del sistema;
- ii) usare il metodo di Routh per ridurre il problema ad un solo grado di libertà e descrivere le soluzioni del problema ridotto.
- iii) utilizzando il punto precedente descrivere i moti del punto  $P$  sulla superficie  $\Sigma$  al variare delle condizioni iniziali.

### Secondo Esercizio

Un sistema meccanico, mobile in un piano verticale, è composto da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e da un corpo rigido formato da 3 aste omogenee  $AB, AC, BC$  incernierate in modo da formare il triangolo  $ABC$ . Le aste hanno tutte massa  $m$  e le loro lunghezze sono rispettivamente  $\overline{AB} = 1, \overline{AC} = 1, \overline{BC} = \sqrt{3}$ .

Il vertice  $A$  del triangolo è fissato nell'origine  $O$  di un sistema di riferimento  $OXY$ , mentre  $P$  è vincolato a muoversi lungo

l'asta  $BC$ ; inoltre  $P$  è collegato con l'origine  $O$  da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, con accelerazione  $g$ . Detto  $M$  il punto medio di  $BC$ , si scelgano come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  che il segmento  $AM$  forma con l'asse  $Y$  (misurato in verso antiorario) e l'ascissa  $s$  del punto  $P$  su  $BC$ , misurata a partire da  $M$  e positiva verso il vertice  $C$ .

- Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- trovare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro  $\alpha = \frac{k}{mg}$ ;
- posto  $\alpha = 1$ , si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

