

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

9 Gennaio 2008

**Esercizio 1:** Dato il sistema newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1 - x^2 - \gamma \frac{dx}{dt},$$

dove  $\gamma > 0$ ,

a) lo si discretizzi in modo conservativo con passo  $h$ , usando l'approssimazione

$$\Delta_0^2 \simeq h^2 D^2 \quad , \quad \Delta_- \simeq hD$$

e la variabile  $y_k = x_k - x_{k-1}$ .

b) fissato  $h = 1$ , si trovi l'intervallo  $(0, \gamma_1)$  massimale di valori di  $\gamma$  in cui le proprietà di stabilità dei punti fissi del sistema discretizzato sono le stesse dei punti di equilibrio del sistema continuo.

**Esercizio 2:** Si consideri la hamiltoniana

$$H(p, q) = p^2 \cos^4 q + V_\alpha(\tan q),$$

con  $V_\alpha(x) = -\alpha \sin x + \sin^2 x$ ,  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 2\}$ .

- 1) Si completi la relazione  $z = \tan q$  ad una trasformazione canonica  $(p, q) \mapsto (w, z)$  in modo che la hamiltoniana nelle nuove variabili sia

$$K(w, z) = w^2 + V_\alpha(z);$$

- 2) si trovi una funzione generatrice per tale trasformazione;
- 3) si studino le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili: in particolare si trovino i punti di equilibrio, se ne discuta la stabilità al variare del parametro  $\alpha$  e si tracci il diagramma di biforcazione degli equilibri.