

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

2 Luglio 2008

**Esercizio 1:** Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r-1)(r-2) - y \\ \dot{y} = y(r-1)(r-2) + x \end{cases},$$

dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- Trovare i punti di equilibrio,
- dimostrare che esistono due orbite periodiche,
- descrivere gli insiemi  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite di tutte le orbite.

**Esercizio 2:** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ , con asse  $z$  verticale ascendente. Sia dato un sistema rotante attorno all'asse  $z$ , con velocità angolare  $\omega$ , costituito da un punto materiale di massa  $m$  vincolato alla circonferenza di raggio  $R$  che a  $t = 0$  sta sul piano  $y = 0$  con centro in  $x = R, z = 0$ . Sul sistema agisce l'accelerazione di gravità di intensità  $g$  e una forza elastica di costante  $k > 0$  che attrae verso l'origine. Si supponga che valga la relazione  $\omega^2 = k/m$ .

- Usando come parametro lagrangiano l'angolo  $\theta$  che la retta congiungente il centro della circonferenza e  $P$  forma con la direzione verticale scrivere la lagrangiana del sistema;
- si scrivano la hamiltoniana e le equazioni di Hamilton;
- si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità al variare dei parametri  $m, g, R, k$ .

**Esercizio 3:** Si consideri il sistema dinamico discreto in  $\mathbf{R}^3$  definito da  $X_{k+1} = AX_k$ , con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare la soluzione generale.
- Determinare se l'origine è un punto fisso stabile, instabile, attrattivo, asintoticamente stabile.