

# Compito di Meccanica Razionale e Analitica

## 9 Luglio 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

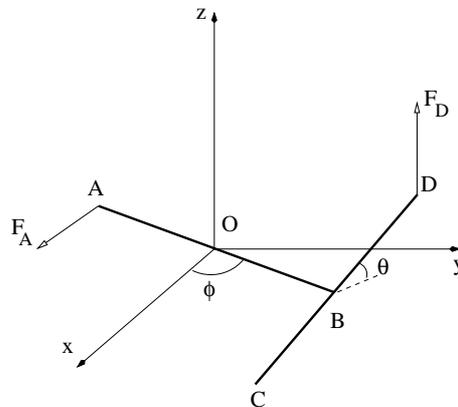
### Primo Esercizio

a) Si consideri un corpo rigido formato da 8 punti materiali di uguale massa, vincolati a stare ai vertici di un cubo. Si dimostri che ogni asse passante per il baricentro è asse principale di inerzia.

b) Cosa si può dire, a riguardo, nel caso di 4 punti materiali di massa uguale, vincolati rigidamente ai vertici di un tetraedro?

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee di lunghezza  $2\ell$  e di massa  $m$ . La prima asta, di estremi  $A, B$ , è vincolata a ruotare nel piano  $Oxy$  mantenendo il baricentro nell'origine  $O$ ; la seconda asta, di estremi  $C, D$ , è vincolata a muoversi mantenendosi ortogonale ad  $AB$ , con il baricentro incernierato in  $B$ . Sul sistema agiscono la forza di gravità, di accelerazione  $-g\hat{z}$ , e due forze costanti  $F_A\hat{x}$ ,  $F_D\hat{z}$  ( $F_A, F_D > 0$ ), applicate rispettivamente nei punti  $A, D$  ( $\hat{x}$  e  $\hat{z}$  sono i versori degli assi  $Ox$  e  $Oz$ ). I vincoli sono ideali.



Usando come coordinate lagrangiane l'angolo  $\phi$  che  $AB$  forma con l'asse  $Ox$  e l'angolo  $\theta$  che  $CD$  forma con il piano  $Oxy$  (vedi figura)

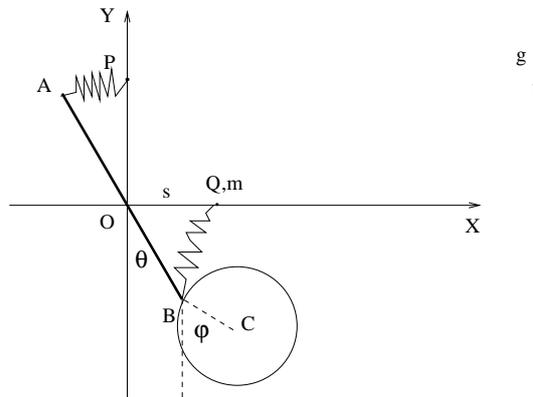
- 1) scrivere la lagrangiana del sistema;
- 2) trovare le posizioni di equilibrio e determinarne la stabilità.

### Terzo Esercizio

In un piano verticale  $OXY$  è mobile il sistema composto da

- un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $4l$ , avente il punto medio fisso nell'origine del sistema di riferimento,
- un anello circolare omogeneo di massa  $m$  e raggio  $l$ , incernierato all'asta nel punto  $B$ ,
- una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla che collega il punto  $A$  con il punto  $P$  di coordinate  $(0, 2l)$ .
- un punto  $Q$  di massa  $m$  mobile sull'asse  $X$  e collegato con una molla di costante elastica  $k$  al punto  $B$ .

Si assumano come coordinate lagrangiane l'angolo  $\theta$  (misurato in senso antiorario) che l'asta  $AB$  forma con la direzione negativa dell'asse  $Y$ , l'angolo  $\varphi$  (misurato in senso antiorario) che un raggio dell'anello forma con la direzione negativa dell'asse  $Y$  e l'ascissa  $s$  del punto  $Q$ .



- Scrivere l'energia cinetica del sistema.
- Calcolare le posizioni di equilibrio.
- Dimostrare che la posizione  $(\theta, \varphi, s) = (0, 0, 0)$  è di equilibrio stabile.