

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO PARZIALE N. 2

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

12 Gennaio 2009

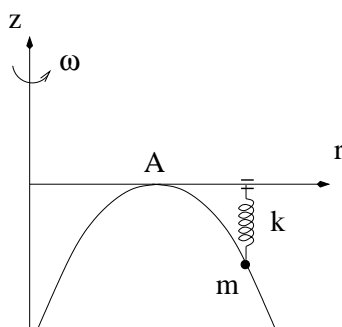
Esercizio 1: Dato un generico sistema hamiltoniano ad un grado di libertà con hamiltoniana $H(p, q)$ di classe C^2 , lo si discretizzi con passo $h > 0$ usando il metodo di Eulero, cioè con l'approssimazione $D \simeq \Delta_+/h$. Si dimostri che:

- i punti fissi del sistema discretizzato sono i punti di equilibrio del sistema continuo;
- i punti di sella non degeneri della funzione hamiltoniana sono punti fissi iperbolici per h abbastanza piccolo;
- i punti di massimo e minimo non degeneri della hamiltoniana corrispondono a punti fissi con moltiplicatori di Lyapounov > 1 per ogni h .

Esercizio 2: Si consideri un corpo puntiforme di massa m vincolato alla parabola

$$r = s + A; \quad z = -s^2,$$

con $A > 0$, ruotante attorno all'asse z , orientato verso l'alto, con velocità angolare costante ω . Sul corpo agiscono inoltre la forza di gravità, di intensità mg , e una forza elastica proporzionale alla distanza dall'asse r , con costante elastica $k > 0$.



- Usando la coordinata lagrangiana s si scriva l'energia potenziale e la funzione di Lagrange.
- Descrivere tutti i punti di equilibrio, al variare del parametro A .
- Studiare la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b).
- Disegnare il ritratto di fase nei casi qualitativamente distinti.