

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

19 Gennaio 2009

Esercizio 1: Dato il potenziale $U(x, y) = x(x^2 + y^2 - 2)$ si consideri il sistema dinamico gradiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = -\nabla U(x, y) .$$

- Trovarne i punti di equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
- Uno dei punti di equilibrio risulterà essere un pozzo nonlineare; dire quali tra i seguenti insiemi è completamente contenuto nel bacino di attrazione del pozzo: b1) l'asse x ; b2) il semicerchio aperto $x^2 + y^2 < 2, x > 0$; b3) il semicerchio aperto $x^2 + y^2 < 2, x < 0$.

Esercizio 2: Data l'equazione alle differenze finite lineare

$$x_{k+3} = 2x_{k+2} + x_{k+1} - 2x_k :$$

- trasformarla in sistema dinamico discreto in \mathbf{R}^3 con matrice dei coefficienti A ;
- dimostrare che l'origine non è stabile per $k \rightarrow +\infty$;
- trovare tutti i punti fissi del sistema dinamico discreto;
- trovare tutti i punti periodici di periodo due del sistema dinamico discreto.

Esercizio 3:

Si consideri un corpo puntiforme di massa m vincolato alla cubica

$$z = r^3/3 + r$$

ruotante attorno all'asse z , orientato verso l'alto, con velocità angolare costante ω . Sul corpo agisce la gravità di intensità mg .

- Usando la coordinata lagrangiana r si scriva l'energia potenziale e la funzione di Lagrange.
- Trovare tutti i punti di equilibrio, al variare dei parametri g, ω .
- Studiare la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b) e disegnare il diagramma di biforcazione in funzione del parametro $J = \omega^2/(2g)$.
- Disegnare il ritratto di fase nei casi qualitativamente distinti e indicare in quali casi e dove siano presenti orbite periodiche.