

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

10 Febbraio 2009

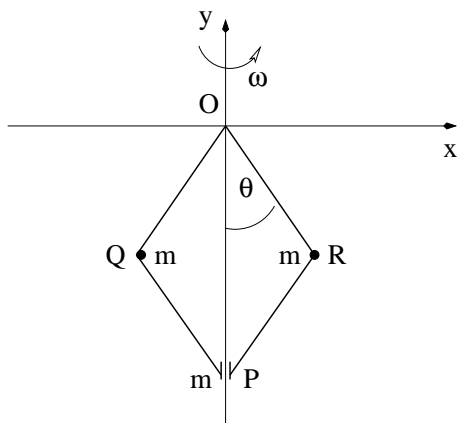
Esercizio 1: Dato il sistema newtoniano con dissipazione dato dall'equazione del secondo ordine

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sin x - \frac{x^2}{4\pi^2} - \gamma \frac{dx}{dt}$$

con $\gamma > 0$,

- descrivere i punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- tracciare nel piano delle fasi le separatrici e tratteggiare i bacini di attrazione dei pozzi nel caso di piccola dissipazione ($\gamma \ll 1$).

Esercizio 2: Si consideri il sistema meccanico formato da 3 punti materiali P, Q, R di massa m vincolati ad un piano verticale in cui introduciamo il riferimento Oxy , con asse y verticale ascendente. Il punto P è vincolato a scivolare lungo l'asse y ed è collegato a Q e ad R da due sbarrette di lunghezza ℓ e massa trascurabile. I punti Q, R sono anche collegati all'origine O da altre due sbarrette uguali alle precedenti (vedi figura). Il piano è posto in rotazione attorno all'asse y con velocità costante ω . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che OQ forma con la direzione verticale:



- scrivere la lagrangiana;
- trovare gli equilibri e discuterne la stabilità in funzione del parametro $J = \frac{2g}{\omega^2 \ell} \neq 1$;

- c) tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri;
- d) fare un disegno qualitativo delle soluzioni nei casi significativi.

Esercizio 3: Data l'equazione alle differenze finite lineare

$$x_{k+2} + x_{k+1} + x_k = 6 \quad :$$

- a) trasformarla in sistema dinamico discreto in \mathbf{R}^2 ;
- b) trovare tutti i punti fissi del sistema dinamico discreto;
- c) trovare quali punti fissi sono stabili per $k \rightarrow \pm\infty$;
- d) trovare tutti i punti periodici del sistema dinamico discreto e il loro periodo.