

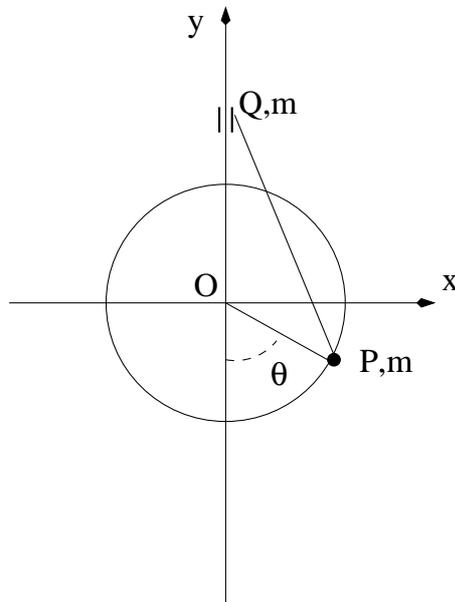
# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

3 Giugno 2009

**Esercizio 1:** Si consideri il sistema meccanico formato da 2 punti materiali  $P, Q$  di massa  $m$  vincolati ad un piano verticale in cui introduciamo il riferimento  $Oxy$ , con asse  $y$  verticale ascendente. Il punto  $P$  è collegato all'origine  $O$  da una sbarretta rigida, di massa trascurabile, di lunghezza  $R > 0$ . Il punto  $Q$  è vincolato a scivolare lungo l'asse  $y$  ed è collegato a  $P$  da una sbarretta rigida di lunghezza  $kR$  e massa trascurabile; assumiamo  $k > 1$  (vedi figura). Sui due punti materiali agisce una forza di gravità di intensità  $g > 0$  rivolta nel verso negativo dell'asse  $y$ . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  che  $OP$  forma con il verso negativo dell'asse  $y$ :



- scrivere la lagrangiana;
- trovare gli equilibri e discuterne la stabilità; discutere la dipendenza dai parametri  $m, g, k$
- fare un disegno qualitativo delle soluzioni;
- Domanda facoltativa: discutere cosa succede al limite per  $k \rightarrow 1^+$ .

**Esercizio 2:** Sia dato il sistema newtoniano ad un grado di libertà definito dall'energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{-x^4 + x^2 - 4}$$

con dissipazione  $\gamma > 0$ .

- a) Scrivere l'equazione del sistema e trovare i punti di equilibrio;
- b) discutere la stabilità dei punti di equilibrio;
- c) fare un disegno qualitativo delle soluzioni nel caso conservativo  $\gamma = 0$ ;
- d) fare un disegno qualitativo che descriva l'andamento per  $t \geq 0$  delle soluzioni nel caso dissipativo, per  $\gamma$  piccolo e per condizioni iniziali corrispondenti ad energia  $E \leq 0$ .

**Esercizio 3:** Dato lo stesso sistema dinamico newtoniano dell'esercizio 2, considerato per  $\gamma > 0$  ma piccolo:

- a) Discretizzare il sistema dinamico in modo conservativo con passo  $h > 0$ ;
- b) trovare i punti fissi del sistema dinamico discreto così ottenuto, determinarne la stabilità del linearizzato;
- c) per ciascuno dei punti fissi, quali conclusioni si possono trarre sulla stabilità in base ai risultati del punto b)?
- d) Domanda facoltativa: come cambierebbero le conclusioni dei punti b e c nel caso  $\gamma = 0$ ?