Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
11 Febbraio 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R sul bordo del quale è saldato un punto materiale P di massa m. Il baricentro B del disco può muoversi lungo l'asse Oz ed il disco può ruotare mantenendosi ortogonale al piano Oxy. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g, e una molla di costante elastica k collega B al punto $Q \equiv (0, 0, \ell)$, $\ell > 0$. Inoltre sul punto P agisce una forza costante $F\mathbf{e}_y$, $F > 0$, dove $\mathbf{e}_y$ è il versore dell'asse Oy.
Utilizzando la coordinata s di B sull'asse Oz, l'angolo ϕ che il piano del disco forma col piano Oxz e l'angolo θ che il segmento BP forma con Oz

1. scrivere la lagrangiana del sistema;

2. calcolare i punti di equilibrio del corrispondente sistema lagrangiano e discuterne la stabilità.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico composto da due punti materiali P_1, P_2 di ugual massa m vincolati a muoversi rispettivamente sulle circonferenze di centri $C_1 \equiv (-R, 0), C_2 \equiv (R, 0)$ e raggio R. Sui due punti agisce la forza di gravità, di accelerazione g, ed una forza elastica esercitata da una molla di costante k che li collega. Usando come coordinate lagrangiane gli angoli ϕ_1, ϕ_2 formati dai segmenti C_1P_1, C_2P_2 con la direzione verticale e supposti crescenti in senso antiorario,

1. scrivere la lagrangiana del sistema;

2. dimostrare che, se $mg = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)kR$, la configurazione $(\phi_1, \phi_2) = (\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ è un equilibrio stabile;

3. calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno a tale equilibrio.

Terzo Esercizio

Si completino le relazioni

$$Q_1 = \arctan q_1\,, \qquad Q_2 = e^{q_2}$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \longrightarrow (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

e si utilizzi tale trasformazione per integrare il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left[p_1^2(1+q_1^2)^2 + p_2^2 e^{-2q_2} + \arctan^2 q_1 + e^{2q_2}\right]\,,$$

con condizioni iniziali

$$p_1(0) = \frac{1}{1+\tan^2(1)}, \quad p_2(0) = 1, \quad q_1(0) = \tan(1), \quad q_2(0) = 0\,.$$