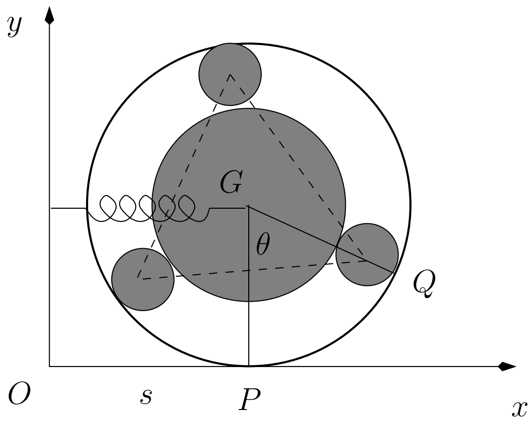
Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
18 Giugno 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano composto da un anello $\mathcal{A}$ di massa M e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox. All'interno dell'anello si muovono un disco $\mathcal{D}$ di massa m e raggio r e tre dischetti $\mathcal{D}_j$ di masse $\mu_j, j = 1, 2, 3$ e ugual raggio ρ. Si ha inoltre $\mu_1 = 2\mu, \mu_2 = \mu_3 = \mu$ ed $R = r + 2\rho$. I corpi $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{D}_j$ sono omogenei e rotolano l'uno sull'altro senza strisciare; i baricentri dei dischetti si trovano ai vertici di un triangolo equilatero. Il punto G, baricentro comune di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$, è collegato al punto $(x, y) = (0, R)$ da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, con accelerazione g.



Si considerino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto G, e l'angolo θ che GQ forma con la direzione verticale, dove Q è il punto di contatto tra l'anello $\mathcal{A}$ e il dischetto $\mathcal{D}_1$.

1) Calcolare le velocità angolari di $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{D}_j, j = 1, 2, 3$.

2) Scrivere la lagrangiana del sistema.

3) Calcolare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

Secondo Esercizio

Fissato un sistema di riferimento $Oxyz$ in $\mathbb{R}^3$, si consideri il moto di un punto P di massa m in un campo centrale con energia potenziale $V(x, y, z) = -\frac{k}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (problema di Keplero).

a) Si scriva la lagrangiana del problema in coordinate polari sferiche $(r, \phi, \theta) \in (0, +\infty) \times S^1 \times (-\pi/2, \pi/2)$.

b) Date la posizione e la velocità iniziali $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$ del punto P, assumiamo che $\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 \neq 0$. Mostrare che, ruotando opportunamente il piano equatoriale delle coordinate sferiche, si può assumere che la lagrangiana non dipenda da θ (latitudine). Usare il metodo di riduzione di Routh per integrare completamente il problema.

c) Assumiamo adesso che $\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 = 0$. Dimostrare che la traiettoria è rettilinea.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = K(K(q_1, p_1), p_2) \,, \qquad K(q, p) = \log(1 + q^2 + p^2) \ .$$

Trovare una funzione generatrice, soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema.