

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

21 Settembre 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano composto da un anello omogeneo di massa M e raggio R e da un disco omogeneo di massa m e raggio r , con $r < R$. L'anello può ruotare attorno al suo centro, fisso nell'origine O del riferimento. Il disco può rotolare senza strisciare all'interno dell'anello, mantenendosi sempre a contatto con esso. Detti Q un punto dell'anello e P il punto di contatto tra disco e anello, si usino gli angoli θ , ϕ tra OQ , OP e la direzione verticale come coordinate per descrivere il moto. Assumendo che la velocità angolare del disco sia non nulla, trovare il centro istantaneo di rotazione del disco, come funzione di $(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi})$.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico composto da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ . Un'estremo A dell'asta è libero di muoversi lungo l'asse Ox . Sull'asta agisce la forza di gravità, con accelerazione g . Inoltre una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro B dell'asta all'asse Oy , mantenendosi sempre parallela all'asse Ox . Un'altra molla, uguale alla prima, collega l'altro estremo C dell'asta all'asse Ox , mantenendosi sempre parallela a Oy . Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s di A e l'angolo θ che AC forma con la direzione verticale:

- a) si scriva la lagrangiana del problema;
- b) si trovino tutte le configurazioni di equilibrio e se ne determini la stabilità in funzione dei parametri m, g, k, ℓ ;
- c) nel caso $mg = 8k\ell$ si calcolino le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno a $(\theta, s) = (0, 0)$;

- d) si determini il modo normale delle oscillazioni discusse al punto c) che non dipende dalla forza di gravità.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico costituito da tre punti materiali P_1, P_2, P_3 di uguale massa m . I punti sono vincolati a muoversi lungo una retta, su cui si è fissato un riferimento Ox , e hanno coordinate x_1, x_2, x_3 rispettivamente con $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Le uniche forze agenti sono due forze elastiche esercitate da due molle uguali, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, che collegano P_1 a P_2 e P_2 a P_3 .

- a) Trovare un'integrale primo diverso dall'energia;
- b) scegliere delle coordinate tali che la lagrangiana del problema abbia una variabile ciclica;
- c) ridurre il numero dei gradi di libertà del problema e dimostrare che, nel sistema ridotto, la configurazione $x_1 = x_2 = x_3$ è un equilibrio stabile.