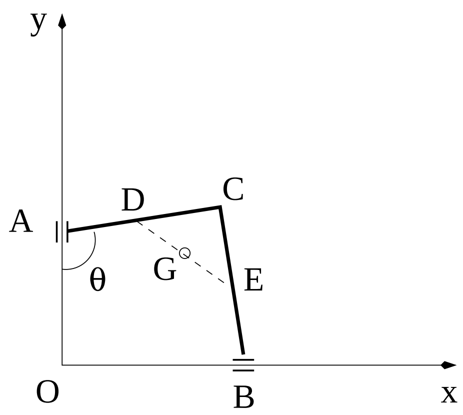
Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
24 Novembre 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$ con il vettore $\hat{\mathbf{y}}$ verticale ascendente. Si consideri un corpo rigido formato da due aste omogenee uguali di massa m e lunghezza ℓ saldate tra loro ad un estremo C e formanti un angolo retto. Detti A e B gli estremi liberi delle due aste, si vincola A a scorrere sull'asse $O\hat{\mathbf{y}}$ e B a scorrere sull'asse $O\hat{\mathbf{x}}$ (vedi figura). Gli assi sono lisci, quindi le reazioni vincolari sviluppate sono ortogonali ad essi; inoltre sul corpo agisce la forza di gravità. Si utilizzi l'angolo θ che l'asta AC forma con la direzione verticale per descrivere la configurazione del corpo.



a) Scrivere l'equazione del moto tramite le equazioni cardinali.

b) Verificare che si ha un equilibrio quando l'ascissa del baricentro G del corpo coincide con l'ascissa di B.

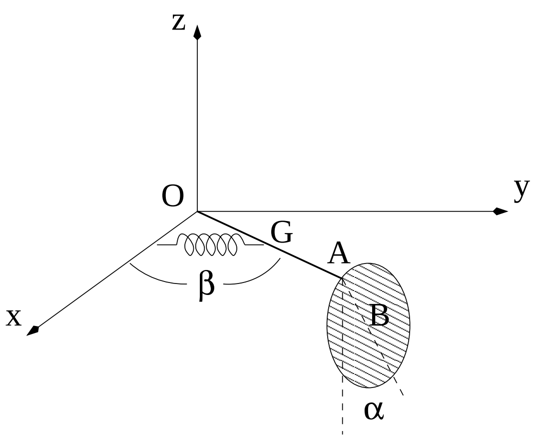
Secondo Esercizio

Fissato un sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{z}}$, con il vettore $\hat{\mathbf{z}}$ verticale ascendente, si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ e da un disco omogeneo di massa M e raggio R. L'asta è vincolata a muoversi nel piano $O\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$ ed un suo estremo è incernierato in O. All'altro estremo A dell'asta è vincolato un punto del bordo del disco: attorno a questo punto il disco può ruotare mantenendosi sempre ortogonale alla direzione dell'asta. Sul sistema agisce la forza di gravità ed una forza elastica di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che collega il baricentro G dell'asta all'asse $O\hat{\mathbf{x}}$. La molla si mantiene sempre parallela all'asse $O\hat{\mathbf{y}}$ e tutti i vincoli sono ideali.

Si utilizzino come coordinate lagrangiane l'angolo β che l'asta forma con l'asse $O\hat{\mathbf{x}}$ e l'angolo α che la direzione AB, dove B il baricentro del disco, forma con la direzione verticale (vedi figura).

a) Scrivere l'energia cinetica del sistema meccanico.

b) Trovare tutte le configurazioni di equilibrio e determinare la loro stabilità.



Svolgimento del primo Esercizio

Sia P il centro di istantanea rotazione del corpo: scrivo la seconda equazione cardinale rispetto a P:

$$\dot{\vec{\mathbf{N}}}_P = \vec{\mathbf{M}}_P - m\vec{\mathbf{v}}_P \times \vec{\mathbf{v}}_G \ .$$

$$\dot{\vec{\mathbf{N}}}_P = \frac{1}{2} mg\ell(3\cos\theta - \sin\theta)\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$-m\vec{\mathbf{v}}_P \times \vec{\mathbf{v}}_G = -m\ell^2 \sin(2\theta)\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} + (D-C) \times m\vec{\mathbf{v}}_D + \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} + (E-C) \times m\vec{\mathbf{v}}_E \ .$$

$$\vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} = \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} = \frac{m\ell^2}{12}\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3 \ .$$

$$(D-C) \times m\vec{\mathbf{v}}_D = \frac{m\ell^2}{4}\dot{\theta}[1 - 2\sin(2\theta) + 4\cos^2\theta]\hat{\mathbf{e}}_3 \,;$$

$$(E-C) \times m\vec{\mathbf{v}}_E = \frac{m\ell^2}{4}\dot{\theta}[1 + 2\sin(2\theta) + 4\cos^2\theta]\hat{\mathbf{e}}_3$$

quindi

$$\vec{\mathbf{M}}_P = m\ell^2\dot{\theta}\left(\frac{2}{3} + 2\cos^2\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_3 \ .$$

Semplificando e dividendo per $m\ell^2$ la seconda equazione cardinale proiettata sull'asse $O\hat{\mathbf{e}}_3$ diventa

$$\ddot{\theta}\left(\frac{2}{3} + 2\cos^2\theta\right) = \sin(2\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2\ell}(\sin\theta - 3\cos\theta) \ .$$

Equilibri

$$\tan\theta = 3 \ .$$

Svolgimento del secondo Esercizio

$$
\begin{aligned}
(B-O) &= (A-O)+(B-A)= \\
&= 2\ell \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -\cos(\pi/2-\beta)\sin\alpha \\ \sin(\pi/2-\beta)\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2\ell\cos\beta - R\sin\alpha\sin\beta \\ 2\ell\sin\beta + R\sin\alpha\cos\beta \\ -R\cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$T = \frac{3}{4}MR^2\dot\alpha^2 + 2\cos\alpha M\ell R\dot\alpha\dot\beta + \left[\frac{2}{3}m\ell^2 + 2M\ell^2 + MR^2\left(\frac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{1}{8}\right)\right]\dot\beta^2$$

$$V(\alpha,\beta) = -MgR\cos\alpha + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\beta$$

Equilibri

$$V_\alpha = MgR\sin\alpha = 0\,, \qquad V_\beta = k\ell^2\sin\beta\cos\beta = 0\,,$$

quindi

$$(\alpha,\beta) = (0,0);\ (0,\frac{\pi}{2});\ (0,\pi);\ (0,\frac{3}{2}\pi);\ (\pi,0);\ (\pi,\frac{\pi}{2});\ (\pi,\pi);\ (\pi,\frac{3}{2}\pi)\ .$$

Stabilità

$$V_{\alpha\alpha} = MgR\cos\alpha\,, \quad V_{\alpha\beta} = 0\,, \quad V_{\beta\beta} = k\ell^2\cos(2\beta)\,,$$

quindi gli unici due punti stabili sono $(\alpha,\beta) = (0,0), (0,\pi)$.