Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
8 Gennaio 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Esercizio 1: Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri un punto materiale P, di massa m, vincolato alla superficie parametrica di equazioni

$$\begin{cases} x &= r(z)\cos\lambda \\ y &= r(z)\sin\lambda \\ z &= z \end{cases} \qquad \text{dove } r(z) = \frac{1}{z^4 - z^2 + 1},$$

con $z \in \mathbb{R}$, $\lambda \in S^1$. Il punto materiale non è soggetto a forze attive, ma solo alla reazione vincolare. Utilizzando come coordinate (z, λ)

A) si scriva la lagrangiana del sistema;

B) si scriva la hamiltoniana del sistema e si trovino gli integrali primi del sistema hamiltoniano corrispondente;

C) si riduca il numero di gradi di libertà del problema utilizzando il fatto che una variabile è ciclica e si trovino gli equilibri del problema ridotto;

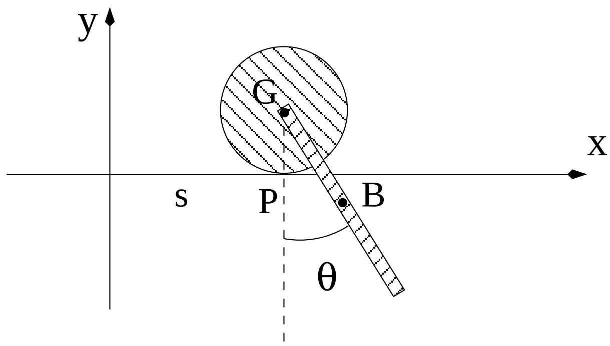
D) si scrivano le formule di quadratura che determinano le leggi orarie per le variabili z e λ. Si mostri che $\dot{\lambda}$ non si annulla mai salvo che per le soluzioni in cui λ è costante;

E) si descrivano qualitativamente le traiettorie delle soluzioni nello spazio delle configurazioni in funzione dei valori degli integrali primi, in particolare indicando quali sono limitate e quali corrispondono ad orbite periodiche;

F) si determinino i valori degli integrali primi per cui valgono le ipotesi del teorema di Liouville-Arnold. In particolare si trovino i valori degli integrali per cui si ottengono dei tori invarianti.

Secondo Esercizio

Si consideri il sistema piano costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ vincolata per un estremo al baricentro B del disco. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x. Denotiamo inoltre con B il baricentro dell'asta (vedi figura).



Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto P tra il disco e l'asse x, e l'angolo θ tra l'asta e la direzione verticale,

A) scrivere le equazioni di Hamilton del sistema;

B) mostrare che le coordinate s, θ separano l'equazione di Hamilton-Jacobi in due equazioni differenziali ordinarie;

C) mostrare che le due equazioni differenziali ordinarie del punto B) possono sempre essere portate in forma normale, con una singolarità dove $\dot{\theta} = 0$.