

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

17 Novembre 2009

**Esercizio 1:** Dato il sistema dinamico continuo lineare

$$\dot{X} = AX \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- se ne calcolino gli esponenti di Lyapounov, e si discuta la stabilità dell'origine;
- si trovi un sottospazio lineare reale di dimensione 1 invariante;
- si trovi un sottospazio lineare reale di dimensione 2 invariante.

**Esercizio 2:** Data la funzione energia potenziale  $V(x) = x^5 - 2x^3 + x$ , si consideri il sistema newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x) - \gamma \frac{dx}{dt}$$

si esamini prima il caso conservativo  $\gamma = 0$ :

- si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;
- fare disegni qualitativi delle soluzioni nel piano  $(x, dx/dt)$ , in particolare indicando le separatrici.

Quindi si esamini il caso con  $\gamma > 0$ , supposto piccolo:

- trovare i punti di equilibrio del corrispondente sistema dinamico e discuterne la stabilità;
- fare disegni qualitativi delle soluzioni nel piano  $(x, dx/dt)$ , in particolare indicando le separatrici;
- si disegni la soluzione con condizioni iniziali  $(0, 0)$ .

**Esercizio 3:** Si consideri il sistema gradiente

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -U_x \\ \frac{dy}{dt} = -U_y \end{cases} \quad , \quad U(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(1 - xy)$$

- si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;
- si determinino i bacini di attrazione dei pozzi (suggerimento: si cerchino delle rette invarianti).