

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO DI ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

18 Gennaio 2010

**Esercizio 1:** Data l'equazione alle differenze finite, lineare non omogenea:

$$x_{k+2} + 2x_{k+1} + 2x_k = 3$$

- si trovi il punto fisso del corrispondente sistema dinamico discreto, se ne calcolino i moltiplicatori di Lyapounov e si discuta la sua stabilità;
- si calcoli esplicitamente la soluzione con condizioni iniziali  $x_0 = 1, x_1 = 1$ .

**Esercizio 2:** Dato il potenziale  $U(x, y) = -(1 - x^2)(4 - y^2)$ , si consideri il corrispondente sistema dinamico gradiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -U_x \\ \dot{y} = -U_y \end{cases}$$

- trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano  $(x, y)$ , in particolare indicando le separatrici per ogni punto di sella;
- per ogni equilibrio asintoticamente stabile descrivere esplicitamente un aperto positivamente invariante contenuto nel bacino di attrazione.

**Esercizio 3:** In un piano verticale fissiamo un sistema di riferimento  $Oxy$  con asse  $y$  verticale ascendente. In questo piano si consideri un corpo puntiforme  $P$  di massa  $m$ , vincolato a muoversi su di una circonferenza centrata in  $O$  e di raggio  $R$ . Il corpo è soggetto alla forza di gravità di intensità  $mg$  e ad una forza elastica prodotta da una molla di costante  $k$  che congiunge il corpo all'asse  $x$  mantenendosi parallela all'asse  $y$ . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra  $OP$  e la direzione verticale discendente

- si scrivano la lagrangiana e la hamiltoniana del sistema meccanico;
- si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità in funzione del parametro  $J = \frac{mg}{kR}$ ;
- si disegnino il diagramma di biforcazione ed il ritratto in fase nei casi con punti di equilibrio non degeneri.