CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO DI ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giovanni F. Gronchi

18 Giugno 2010

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico continuo lineare

$$\dot{X} = A\,X \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) se ne calcolino gli esponenti di Lyapounov e si discuta la stabilità dell'origine;

b) si trovi un sottospazio lineare reale di dimensione 1 invariante;

c) si trovi un sottospazio lineare reale di dimensione 2 invariante.

Esercizio 2: Si consideri il sistema newtoniano con dissipazione definito da

$$\ddot{x} = f(x) - \gamma \dot{x}\,, \qquad f(x) = \begin{cases} -x(2 + 3x\log|x|) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad , \qquad \gamma > 0\ .$$

- Dimostrare che $f \in C^1(\mathbb{R})$;
- determinare i punti di equilibrio e le loro proprietà di stabilità;
- tracciare un disegno qualitativo del ritratto di fase del sistema dinamico corrispondente, indicando le separatrici e tratteggiando i bacini di attrazione dei pozzi;
- dimostrare che lo stato $(x, \dot{x}) = (0, -2\sqrt{\frac{2}{3}})$ fa parte del bacino di attrazione di un equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 3: In un piano verticale fissiamo un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In questo piano si considerino tre corpi puntiformi P_1, P_2, P_3 di masse m_1, m_2, m_3, con $M := m_1 > m_2 = m_3 =: m$, vincolati a muoversi sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. I corpi sono inoltre vincolati ad essere gli estremi di un triangolo equilatero. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g ed il piano viene fatto ruotare attorno all'asse Oy con velocità angolare costante ω.
Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che OP_1 forma con l'asse Ox,

a) si scriva la lagrangiana del sistema meccanico;

b) si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri M, m, g, ω;

c) si disegni il diagramma di biforcazione degli equilibri;

d) si disegni il ritratto di fase nei casi qualitativamente distinti con punti di equilibrio non degeneri.