

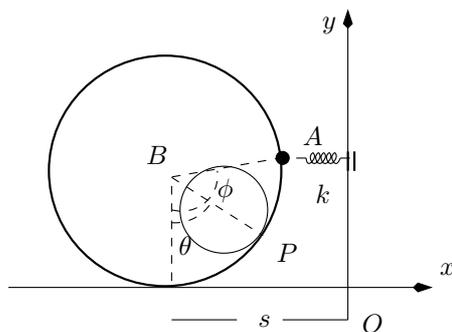
Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica

10 Giugno 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da un anello omogeneo di massa M e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox . All'interno dell'anello può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa m e raggio $r < R$ ed un punto materiale A , di ugual massa m , può scorrere sull'anello. Al punto A è attaccato un estremo di una molla di costante elastica k ; l'altro estremo della molla può scorrere sull'asse Oy . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Detto P il punto di contatto tra disco e anello, si usino come coordinate l'ascissa s del centro B dell'anello e gli angoli θ, ϕ che i segmenti BP, BA formano rispettivamente con la direzione verticale.



- (i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- (ii) Assumendo $mg = kR$ trovare gli equilibri e determinarne la stabilità.

Secondo Esercizio

Si consideri in \mathbb{R}^{2n} il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} [\mathbf{p} \cdot A^{-1} \mathbf{p} + \mathbf{q} \cdot B \mathbf{q}] , \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

con A, B matrici simmetriche di ordine n , costanti e definite positive.

Dimostrare che esiste una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

tale che le nuove variabili \mathbf{Q} siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi.¹

¹ *Suggerimento:* usare la diagonalizzazione simultanea delle forme quadratiche.