

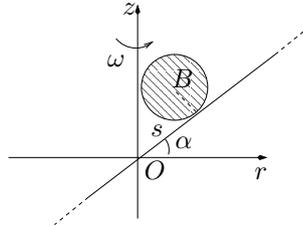
Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

20 Gennaio 2012

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano Orz , dove Or è un asse giacente nel piano Oxy . Il sistema è formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea passante per O , che forma un angolo costante $\alpha \in (0, \pi/2)$ con l'asse Or . Il piano Orz viene fatto ruotare attorno all'asse Oz con velocità angolare costante $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g .



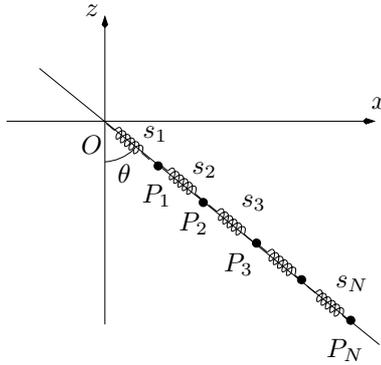
Usando come coordinata l'ascissa s del baricentro B del disco sulla guida

- (i) calcolare l'energia potenziale della forza centrifuga agente sul disco nel riferimento rotante;
- (ii) scrivere la lagrangiana e l'equazione di Lagrange;
- (iii) trovare le configurazioni di equilibrio relative, nel riferimento rotante, e discuterne la stabilità.

Secondo Esercizio

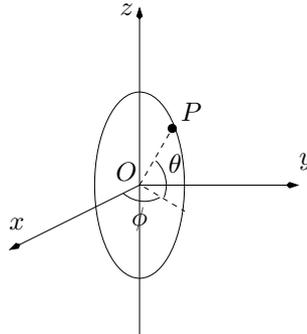
Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano Oxz , composto da N punti materiali P_1, \dots, P_N di ugual massa m . I punti P_j possono scorrere su una guida rettilinea incernierata nell'origine O . Inoltre delle molle di ugual costante elastica k collegano O a P_1 , e P_j a P_{j+1} , $j = 1 \dots N - 1$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la guida forma con la direzione verticale, l'ascissa s_1 di P_1 sulla guida e le ascisse relative $s_j, j = 2 \dots N$ dei P_j calcolate rispetto ai P_{j-1} sulla guida.

- (i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- (ii) Calcolare tutte le configurazioni di equilibrio.
- (iii) Determinare la stabilità degli equilibri.



Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un anello omogeneo di massa M e raggio R , con centro fissato in O e libero di ruotare attorno all'asse Oz . Sull'anello può scivolare un punto materiale P di massa m . Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo ϕ tra l'anello e il piano Oxz , e l'angolo θ tra il segmento OP e la sua proiezione sul piano Oxy (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g .



- (i) Scrivere la lagrangiana e la hamiltoniana del sistema.
- (ii) Ridurre il numero di gradi di libertà del sistema usando la variabile ciclica e descrivere la dinamica nello spazio ridotto assumendo che i valori iniziali $\theta_0, \dot{\phi}_0$ di $\theta, \dot{\phi}$ soddisfino la condizione

$$\left(1 + 2\frac{m}{M} \cos^2 \theta_0\right) |\dot{\phi}_0| < \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (1)$$

- (iii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti del sistema hamiltoniano che siano in involuzione. Determinare inoltre i valori singolari delle variabili canoniche $(p_\phi, p_\theta, \phi, \theta)$ per cui tali integrali non sono indipendenti assumendo che valga la condizione (1).