# Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
## 3 Luglio 2012
**(usare fogli diversi per esercizi diversi)**

### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento inerziale $\Sigma = Ox_1x_2x_3$, con versori degli assi $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. Si consideri il moto di un punto materiale $P$ di massa $m$ in un riferimento $\Sigma' = Ox'_1x'_2x'_3$ che ruota attorno all'asse $Ox_3$ di $\Sigma$ con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$, in cui $\omega = \omega(t)$ è una funzione nota del tempo. Il punto $P$ è collegato all'origine da una molla di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo nulla.

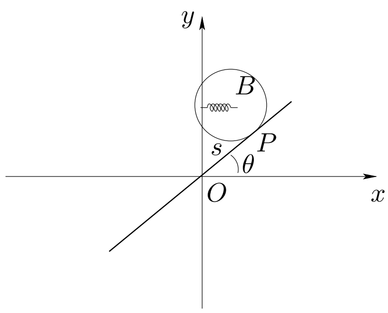
Usando come coordinate lagrangiane le variabili $x'_1, x'_2, x'_3$, che rappresentano le coordinate cartesiane in $\Sigma'$,

1) scrivere le componenti lagrangiane delle forze apparenti nel riferimento $\Sigma'$;

2) scrivere le equazioni di Lagrange per il moto del punto nel riferimento $\Sigma'$.

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxy$ con asse $Oy$ verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico piano composto da un'asta omogenea di massa $m$ e lunghezza $2\ell$ che può ruotare nel piano $Oxy$ avendo il baricentro incernierato nell'origine $O$. Sull'asta può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa $M$ e raggio $R$, mantenendosi sempre a contatto con l'asta (vedi figura). Il baricentro $B$ del disco è collegato all'asse $Oy$ da una molla che si mantiene sempre parallela all'asse $Ox$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione $g$.




Usando come coordinate l'angolo $\theta$ che l'asta forma con l'asse $Ox$ e l'ascissa $s$ sull'asta del punto di contatto $P$ tra disco e asta

i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) trovare i punti di equilibrio al variare dei parametri $m, M, g, R, k, \ell$;

iii) determinare la stabilità degli equilibri assumendo $2Mg = kR$;

iv) nelle ipotesi del punto iii) scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno agli equilibri stabili.

**Terzo Esercizio**

Completare la relazione
$$P = \frac{p}{1+t^2} - 2q$$
ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo
$$\mathbb{R}^3 \ni (p,q,t) \overset{\Psi}{\mapsto} (P(p,q,t), Q(p,q,t), t) \in \mathbb{R}^3 \ .$$
Dato il campo vettoriale hamiltoniano $X_H = \mathbb{J}\nabla_{(p,q)}H$, con
$$H(p,q,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{p^2}{(1+t^2)^2} + q^2\right] \ ,$$
determinare il campo hamiltoniano $\Psi_* X_H$, che si ottiene da $X_H$ attraverso la trasformazione $\Psi$. Trovare inoltre una funzione di Hamilton $K(P,Q,t)$ per tale campo.