

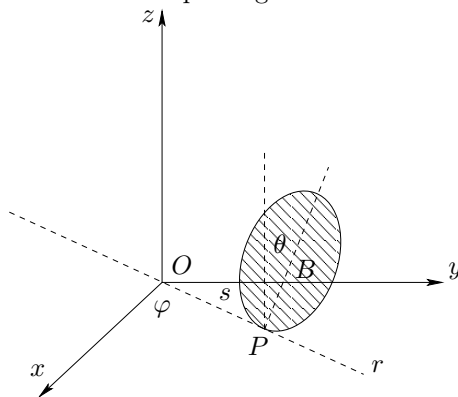
Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

15 Luglio 2014

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo \mathcal{D} di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea r incernierata nell'origine O , che a sua volta può ruotare nel piano Oxy . Il disco può anche inclinarsi, con il vincolo che r rimanga nel piano di \mathcal{D} . Si usino come coordinate l'angolo φ che r forma con Ox , l'ascissa s del punto di contatto P tra \mathcal{D} ed r e l'angolo θ che il disco forma con il piano generato da r e Oz (vedi figura).



1. Calcolare la velocità angolare del disco.
2. Scrivere il momento angolare del disco rispetto al polo P .

Secondo Esercizio

In un piano verticale con un sistema di riferimento cartesiano Oxy è mobile il seguente sistema materiale formato da:

- (i) un corpo rigido \mathcal{C} costituito da un anello omogeneo di massa m e raggio R e da un'asta AB , omogenea e di massa m , di lunghezza $2R$ saldata all'anello in modo che AB sia un diametro;
- (ii) un punto P di massa m libero di muoversi senza attrito sull'asta AB e collegato al centro C dell'anello da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

Il corpo rigido \mathcal{C} rotola senza strisciare sull'asse delle ascisse e tutto il sistema è soggetto alla forza peso. Si prendano come parametri lagrangiani l'angolo θ che $B - A$ forma con la direzione negativa dell'asse delle ordinate (crescente in verso antiorario) e l'ascissa s del punto P su AB ($-R < s < R$), misurata da C e positiva verso B .

- a) Scrivere le equazioni di Lagrange per il moto del sistema.

- b) Studiare le configurazioni d'equilibrio e la relativa stabilità al variare del parametro adimensionale $\alpha = m g / (k R)$.
- c) Trovare i periodi delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla configurazione d'equilibrio stabile nell'ipotesi $\alpha = 1/2$.

Terzo Esercizio

Sia data la seguente funzione di Lagrange:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^4}$$

- a) Scrivere la hamiltoniana $H(p, q)$ associata e le equazioni di Hamilton.
- b) Determinare il moto con condizioni iniziali $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0 > 0$ utilizzando il metodo di Hamilton-Jacobi.