Corso di Istituzioni di Fisica Matematica

Prova scritta

3 Febbraio 2015

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = (r\cos\theta + R)\cos\phi \\ y = (r\cos\theta + R)\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases} \qquad R > r > 0, \quad \theta, \phi \in S^1.$$

Esercizio 2. Si consideri la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(p, q, t) \stackrel{\Psi}{\to} (P, Q, t)$$

con

$$p, q \in \mathbb{R}^2, \ t \in \mathbb{R}, \quad P = R_t p, \quad Q = R_t q, \qquad R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

i) Dimostrare che Ψ è canonica.

ii) Estendere Ψ ad una trasformazione canonica

$$(p, e, q, t) \stackrel{\tilde{\Psi}}{\to} (P, \mathcal{E}, Q, t)$$

definita sullo spazio delle fasi esteso, in cui P, Q sono definite da Ψ, ed $e, \mathcal{E} \in \mathbb{R}$ sono nuove variabili, coniugate al tempo.[1]

iii) Scrivere il campo vettoriale

$$X = \begin{pmatrix} -|q|^{-3}q \\ 0 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}$$

nelle nuove variabili $(P, \mathcal{E}, Q, t)$ definite da $\tilde{\Psi}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \phi) = \frac{1}{2}(I_1^2 - 4I_2^2) - \epsilon\cos(k \cdot \phi),$$

con $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in S^2$, $0 < \epsilon \ll 1$.

1) Scrivere le equazioni mediate corrispondenti.

2) Trovare dei valori del vettore k per cui la differenza tra le variabili d'azione $I(t)$ e le soluzioni $J(t)$ delle equazioni mediate, con la stessa condizione iniziale $I^0 = (I_1^0, I_2^0)$, aumenti linearmente con t per valori generici degli angoli iniziali $\phi^0 = (\phi_1^0, \phi_2^0)$.[2]

[1] *suggerimento*: utilizzare una funzione generatrice della trasformazione Ψ.

[2] *suggerimento*: scegliere k in modo che la combinazione $k \cdot \phi$ non evolva col tempo.