Corso di Istituzioni di Fisica Matematica

Prova scritta

12 Giugno 2015

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente e si consideri il moto di un punto materiale P di massa m su una superficie sferica liscia di raggio R centrata in O. Oltre alla reazione vincolare della sfera, sul punto agisce la forza di gravità, di accelerazione g.

1. Mostrare che se P parte da uno dei poli $N^{\pm} = (0, 0, \pm R)$ allora il momento angolare di P rispetto ad O ha direzione costante oppure è nullo.
2. Assumendo che P parta da un punto diverso da $N^{\pm}$, e usando coordinate sferiche $(\alpha, \delta) \in [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2]$ (longitudine e latitudine), descrivere le possibili traiettorie del punto sulla sfera.

Esercizio 2. Si considerino i campi vettoriali hamiltoniani X_H, X_K, dove

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \qquad K(p,q) = \frac{1}{2}(p^2 - q^2), \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

1. Calcolare le parentesi di Lie $[X_H, X_K]$ ed i flussi Φ_H^t, Φ_K^t associati a X_H, X_K.
2. Verificare che vale la formula

$$f \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s - f \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t = st L_{[X_H, X_K]} f + \mathcal{O}_3(s,t),$$

che misura la mancata commutazione dei flussi Φ_H^t, Φ_K^t, nel caso particolare in cui $f(p,q) = p$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \phi) = h(I) + \epsilon f(I, \phi), \qquad I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{T}^2,$$

dove

$$h(I) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2,$$

per delle costanti $\omega_1, \omega_2 > 0$, e

$$f(I, \phi) = (\sqrt{I_2} \sin\phi_2 - \sqrt{I_1} \sin\phi_1)\Big[A + B(\sqrt{I_2} \sin\phi_2 - \sqrt{I_1} \sin\phi_1)\Big],$$

con $A, B > 0$ costanti. Determinare, se è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \phi) \overset{\Psi}{\mapsto} (\tilde{I}, \tilde{\phi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\phi}$ al primo ordine in ϵ.