

Compito di Meccanica Razionale
8 Luglio 2015
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Un punto materiale di massa unitaria si muove in un campo di forze centrali

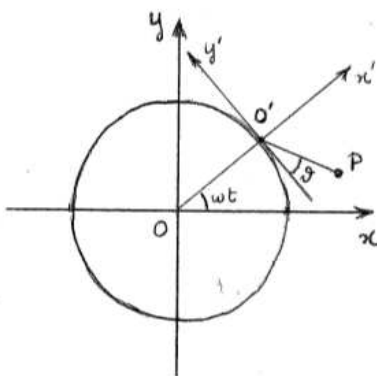
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho \quad , \quad f(\rho) = \rho^5 - 2\alpha\rho$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Studiare qualitativamente il moto del punto materiale, analizzando i casi che si presentano al variare del parametro α , del momento angolare e delle condizioni iniziali.
- b) Discutere l'esistenza di orbite circolari e in caso affermativo trovare il periodo del moto.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$, con asse Oy verticale ascendente e si consideri un pendolo costituito da un punto materiale P di massa m e da un'asta $O'P$ di massa trascurabile e lunghezza ℓ . L'estremo O' dell'asta si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio R centrata in O .



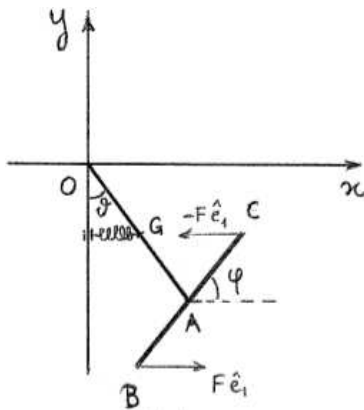
Si consideri anche un secondo sistema di riferimento $\Sigma' = O'x'y'$ con asse $O'x'$ parallelo ad OO' . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l'asta forma con la direzione di $O'y'$ (vedi figura) e assumendo che su P agisca anche la forza di gravità, di accelerazione g ,

- i) scrivere la lagrangiana L del sistema meccanico nel riferimento Σ ;
- ii) scrivere la lagrangiana L' del sistema meccanico nel riferimento Σ' ;
- iii) mostrare che L ed L' sono equivalenti, trovando una funzione $F(\theta, t)$ tale che

$$L = L' + \frac{d}{dt}F.$$

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse y verticale ascendente. Nel piano sono mobili due aste omogenee, OA e BC , di massa m e lunghezza 2ℓ . La prima asta ha l'estremo O incernierato nell'origine; l'altro estremo A è collegato al punto medio dell'asta BC . Il punto medio G dell'asta OA è richiamato verso l'asse delle ordinate da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che si mantiene orizzontale. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione g ed una coppia di forze aventi direzione orizzontale e intensità costante $F > 0$ applicate agli estremi B e C dell'asta BC . Si utilizzino come parametri lagrangiani l'angolo θ che l'asta OA forma con la verticale discendente e l'angolo φ che l'asta BC forma con la direzione orizzontale.



- Scrivere la lagrangiana del sistema.
- Introducendo il parametro adimensionale $J = \frac{mg}{k\ell}$, trovare gli equilibri del sistema e discuterne la stabilità al variare di J .
- Nell'ipotesi $J < \frac{1}{3}$ e $F = \frac{mg}{3}$, trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.