Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
12 Febbraio 2016
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri il moto di un punto materiale di massa m su una superficie liscia di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\phi \\ y = r(z)\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad r(z) = e^{-\frac{1}{2}(z^4-2z^2-3)},$$

dove $z \in \mathbb{R}, \phi \in S^1$. Oltre alla reazione vincolare, sul punto agisce anche una forza di energia potenziale

$$V = \frac{k}{2}(2z^2 - z^4),$$

con $k > 0$ un parametro reale.

1. Discutere l'esistenza di traiettorie circolari al variare dei parametri k, m e delle condizioni iniziali $(z_0, \theta_0, \dot{z}_0, \dot{\theta}_0)$.

2. Assumendo che le condizioni iniziali soddisfino la relazione $r^4(z_0)\dot{\theta}_0^2 = \dfrac{k}{me^5}$ studiare la stabilità delle traiettorie circolari.[1]

Esercizio 2. Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ campi vettoriali scritti nelle coordinate $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e sia $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ la loro parentesi di Lie. Si consideri il cambiamento di coordinate $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ e si denotino con $\mathbf{X}', \mathbf{Y}', [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]'$ i campi vettoriali precedenti scritti nelle coordinate $\mathbf{x}'$. Mostrare che

$$[\mathbf{X}', \mathbf{Y}'] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]'.$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano ad un grado di libertà, con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

1. Disegnare il ritratto di fase e calcolare il periodo delle orbite in funzione delle condizioni iniziali $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$.

2. Mostrare che la trasformazione di coordinate che manda le variabili $(p, q) \neq (0, 0)$ in variabili energia-tempo (h, τ) è canonica. Assumiamo qui che $h = H(p, q)$ e che τ sia il tempo minimo per arrivare al punto (p, q) sulla varietà

   $$\mathcal{M}_h = \{(p, q) : H(p, q) = h\},$$

   partendo da $(p, q) = (\sqrt{2h}, 0)$.

---

[1] Si intende che una traiettoria circolare è stabile quando lo è il corrispondente punto di equilibrio nel piano delle fasi ridotto, con coordinate $(z, \dot{z})$.