Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
26 Gennaio 2016
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}(\dot q^2 + q^2), \qquad q, \dot q \in \mathbb{R}.$$

1. Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L tale che $\bar\gamma(0) = 0$, $\dot{\bar\gamma}(0) = 1$ e mostrare che non ci sono punti coniugati a $(t, q) = (0, 0)$ sull'estremale $\bar\gamma$.

2. Calcolare l'espressione dell'azione lagrangiana

$$S(t_1, q_1) = \int_0^{t_1} L(\gamma(t; t_1, q_1), \dot\gamma(t; t_1, q_1))dt$$

   come funzione delle coordinate (t_1, q_1), dove per ogni (t_1, q_1), con $t_1 \neq 0$, la funzione $t \mapsto \gamma(t; t_1, q_1)$ è la soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange per L tale che $\gamma(0; t_1, q_1) = 0$, $\gamma(t_1; t_1, q_1) = q_1$.

3. Scrivere l'espressione della funzione di Hamilton H associata ad L e mostrare che $S(t_1, q_1)$ soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi per H.

Esercizio 2. Sia $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ una funzione regolare ed $n > 1$ un numero intero. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{n} F\Big(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{jh} p_h, \sum_{h=1}^{n-j+1} q_h\Big),$$

con $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ ed $\alpha_{jh} \in \mathbb{R}$ per ogni $j, h = 1 \dots n$.

1. Trovare dei valori dei coefficienti α_{jh} per cui le relazioni

$$P_j = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{jh} p_h, \qquad Q_j = \sum_{h=1}^{n-j+1} q_h, \qquad\qquad j = 1 \dots n$$

   definiscono una trasformazione canonica

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

   con $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$, $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots Q_n)$, tale che le nuove coordinate $\mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton nelle variabili $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

2. Scelta $F(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$, per $x, y \in \mathbb{R}$, determinare la soluzione $t \mapsto (\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ del sistema hamiltoniano definito da H con

$$p_j(0) = 0, \ j = 1 \dots n, \qquad q_1(0) = 1, \ q_j(0) = 0, \ j = 2 \dots n.$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) + \epsilon \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

con

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \epsilon \ll 1.$$

1. Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{\Psi_\epsilon}{\mapsto} (\mathbf{I}', \boldsymbol{\varphi}')$$

tale che la hamiltoniana $H_\epsilon^{(1)} = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\boldsymbol{\varphi}'$ al primo ordine in ϵ.

2. Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}', \boldsymbol{\varphi}') \overset{\Phi_\epsilon}{\mapsto} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $H_\epsilon^{(2)} = H_\epsilon^{(1)} \circ \Phi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al secondo ordine in ϵ.