Compito di Meccanica Razionale
14 Giugno 2016
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri un punto materiale P di massa m libero di muoversi in un campo centrale con energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}, \qquad k > 0,$$

dove ρ è la distanza di P dal centro di forze O.
Poniamo

$$\alpha = k - \frac{\ell^2}{2m},$$

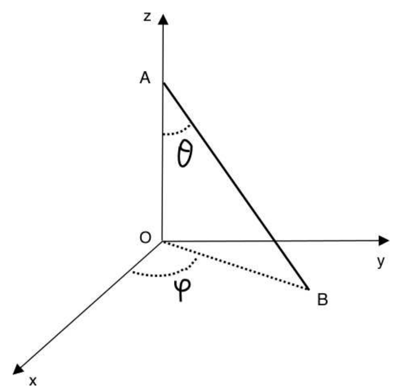
dove ℓ è la componente del momento angolare rispetto ad O lungo la direzione ortogonale al piano del moto. Assumiano di avere condizioni iniziali per cui l'energia totale E sia negativa e $\alpha > 0$.

i) Determinare l'estremo superiore ρ_{max} e l'estremo inferiore ρ_{min} della distanza di P dal centro di forze in funzione di E, ℓ ed il tempo necessario per andare da ρ_{max} a ρ_{min}.

ii) Descrivere la traiettoria della soluzione che parte dalla distanza $\rho = \rho_{max}$ (con velocità radiale $\dot{\rho} = 0$).

iii) Scrivere esplicitamente la soluzione dell'equazione di moto.

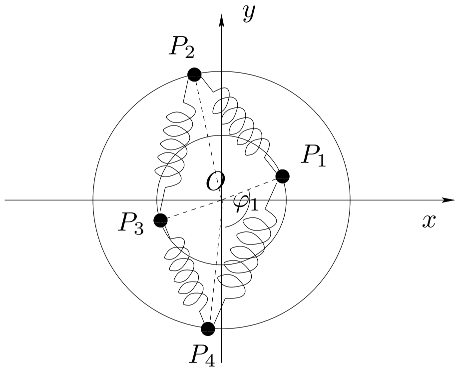
Secondo Esercizio



Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente. Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ ha l'estremo A vincolato a scorrere sull'asse Oz, mentre l'estremo B può muoversi nel piano Oxy. Entrambi i vincoli sono lisci. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Assunti come parametri lagrangiani gli angoli θ e φ descritti nella figura, si scrivano le equazioni di Lagrange.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si considerino due guide circolari concentriche, di raggi r, $R = 2r$. Sulla guida interna possono scorrere due punti materiali P_1, P_3, mentre su quella esterna possono scorrere altri due punti materiali P_2, P_4. I quattro punti hanno tutti la stessa massa m. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Inoltre i punti sono collegati tra loro, come mostrato nella figura, da molle uguali di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.



Si usino come coordinate lagrangiane gli angoli φ_j, $j = 1 \ldots 4$ che i segmenti OP_j formano con la direzione verticale.

1. Dimostrare che la configurazione

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (0, 0, 0, 0)$$

è un equilibrio stabile.

2. Trovare almeno una frequenza propria di oscillazione attorno a tale equilibrio.