Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

6 Giugno 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\Big(\dot q^2 + \frac{1}{q^2}\Big), \qquad q, \dot q \in \mathbb{R}.$$

1. Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L tale che $\bar\gamma(0) = \dot{\bar\gamma}(0) = 1$.
2. Mostrare che non ci sono punti coniugati a $(t,q) = (0,1)$ sull'estremale $t \mapsto \bar\gamma(t)$ per $t > 0$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot A\mathbf{q} \tag{1}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad \alpha > 0$$

definita su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

1. Calcolare il flusso integrale $\mathbf{\Phi}^t(\mathbf{p},\mathbf{q})$ delle equazioni di Hamilton associate ad H e verificare che, per ogni $\bar t \in \mathbb{R}$ fissato, $\mathbf{\Phi}^{\bar t}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ definisce una trasformazione canonica.
2. Dimostrare che la trasformazione $\mathbf{\Psi}$ dipendente dal tempo definita da

$$(\mathbf{p},\mathbf{q},t) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (\mathbf{\Phi}^t(\mathbf{p},\mathbf{q}),t) =: (\mathbf{P},\mathbf{Q},t)$$

è canonica e dire come si trasforma con $\mathbf{\Psi}$ il sistema hamiltoniano associato alla funzione di Hamilton

$$H_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}.$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\boldsymbol{\varphi}),$$

con

$$h(\mathbf{I}) = I_1 + I_2, \quad f(\boldsymbol{\varphi}) = \cos^2(\varphi_1 + 2\varphi_2)\sin^2(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

dove

$$\mathbf{I} = (I_1,I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \epsilon \ll 1.$$

Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) \overset{\Psi_\epsilon}{\mapsto} (\tilde{\mathbf{I}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ.