

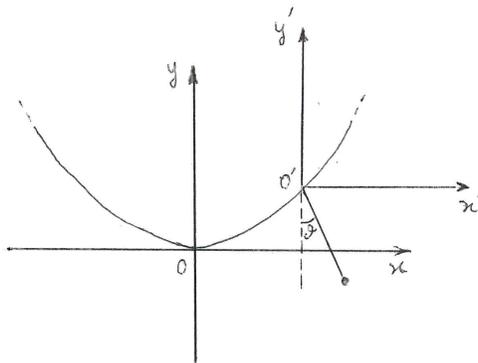
Compito di Meccanica Razionale

1 Giugno 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$, con asse Oy verticale ascendente e si consideri un pendolo costituito da un punto materiale P di massa m e da un'asta $O'P$ di massa trascurabile e lunghezza ℓ . L'estremo O' dell'asta si muove di moto assegnato, con ascissa $s(t)$, su una parabola di equazione $y = x^2/2$, centrata in O .



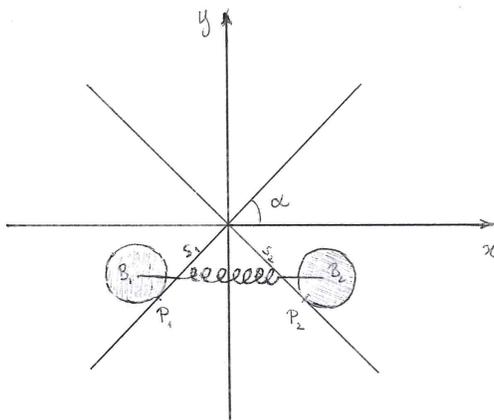
Si consideri anche un secondo sistema di riferimento $\Sigma' = O'x'y'$, con assi paralleli a quelli di Σ . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l'asta forma con la direzione di $O'y'$ (vedi figura) e assumendo che su P agisca anche la forza di gravità, di accelerazione g ,

- i) scrivere la lagrangiana L del sistema meccanico nel riferimento Σ ;
- ii) scrivere la lagrangiana L' del sistema meccanico nel riferimento Σ' ;
- iii) mostrare che L ed L' sono equivalenti, trovando una funzione $F(\theta, t)$ tale che

$$L = L' + \frac{d}{dt}F.$$

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da due dischi omogenei di uguale massa m e raggio r , che rotolano senza strisciare su due guide rettilinee di equazioni $y = \pm x \tan \alpha$, con $\alpha = \pi/4$ (vedi figura). I baricentri dei due dischi sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla e sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g .



Usando come coordinate lagrangiane le ascisse s_1, s_2 dei punti di contatto P_1, P_2 dei dischi sulle due guide,

1. trovare le coordinate dell'unica configurazione di equilibrio del sistema e mostrare che questa è stabile;
2. calcolare le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a questa configurazione.