

Compito di Meccanica Razionale

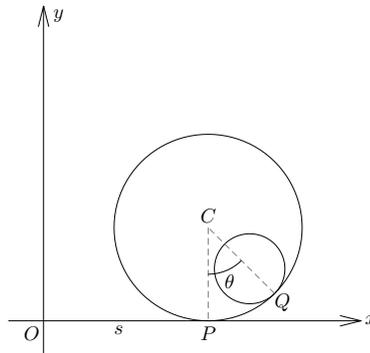
Corso di Laurea in Matematica

19 Settembre 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano si fissi un sistema di riferimento Oxy . Un disco di raggio r rotola senza strisciare all'interno di un anello di raggio $R > r$ il quale a sua volta rotola senza strisciare sull'asse Ox .



Sia C il centro dell'anello e Q il punto di contatto tra l'anello ed il disco. Usando come coordinate l'ascissa s di C e l'angolo θ tra il segmento CQ e l'asse Oy (vedi figura),

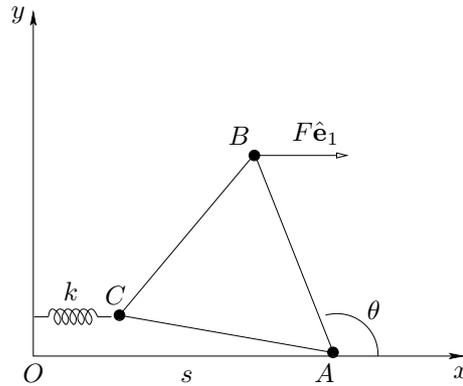
- determinare la velocità angolare dell'anello;
- determinare la velocità angolare del disco;
- calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 del disco e mostrare che C_0 appartiene alla retta passante per Q ed il punto di contatto P tra l'anello e l'asse Ox .

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il moto di un corpo rigido discreto formato da tre punti materiali A, B, C di uguale massa m posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato ℓ . Il punto A può scorrere sull'asse Ox considerato un vincolo liscio. Sul punto B agisce la forza costante $F\hat{e}_1$, dove $F > 0$ ed \hat{e}_1 è il versore dell'asse Ox . Il punto C è collegato all'asse Oy da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che si mantiene parallela all'asse Ox (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g .

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto A e l'angolo θ che il lato AB forma con l'asse Ox

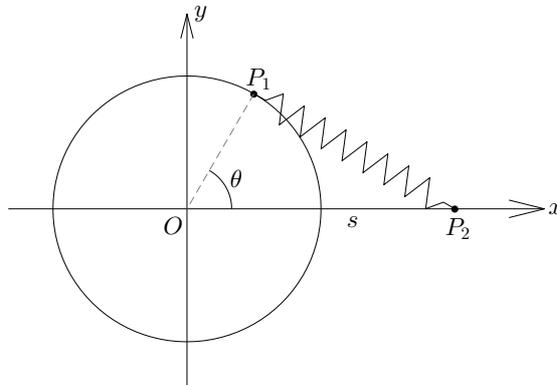
- trovare le coordinate dei punti A, B, C in funzione di s, θ ;
- scrivere l'energia cinetica del corpo rigido;



- c) scrivere le componenti del vettore delle forze (attive) generalizzate $\mathbf{Q} = (Q_s, Q_\theta)$;
- d) trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di massa m vincolati a scorrere senza attrito l'uno sul bordo di una guida circolare di raggio R e centro in O e l'altro lungo l'asse Ox . I punti P_1, P_2 sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g .



Per descrivere le configurazioni del sistema si usi l'angolo θ formato dal segmento OP_1 con l'asse Ox e l'ascissa s del punto P_2 (vedi figura).

- a) Trovare le configurazioni di equilibrio del sistema;
- b) discutere la stabilità di tali configurazioni al variare dei parametri m, g, k, R ;
- c) assumendo che $mg < kR$, calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabili.