

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

23 Febbraio 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Sia $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + 2q \dot{q} t^2 + 2q^2 t - V(q)$$

dove $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 .

i) Scrivere la funzione di Hamilton $H(p, q, t)$ associata a $L(q, \dot{q}, t)$, e le equazioni di Hamilton di H .

ii) Dimostrare che la funzione

$$S(q, P, t) = qP + q^2 t^2$$

genera una trasformazione canonica univalente $\Psi : (p, q, t) \rightarrow (P, Q)$ dipendente dal tempo, e scrivere Ψ esplicitamente.

iii) Trovare il campo vettoriale hamiltoniano X_K coniugato a X_H tramite Ψ^{-1} e un integrale primo del campo X_H .

iv) (*facoltativo*) Discutere i risultati del punto precedente a partire dalla Lagrangiana L .

Esercizio 2. Siano date le funzioni

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} p_2^2 + q_1 + q_2 \quad \text{e} \quad G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{6} p_1^3 + \frac{1}{6} \frac{p_2^3}{q_1^2} - \frac{p_2}{q_1}$$

definite per $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{q_1 = 0\}$.

i) Calcolare la parentesi di Poisson $\{F, G\}$.

ii) Calcolare il campo vettoriale $X := [X_G, X_F]$, dove X_F e X_G sono i campi vettoriali Hamiltoniani associati a F e G , rispettivamente, e determinare una funzione $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ per cui $X = X_H$.

iii) Scrivere una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Dare un'interpretazione delle nuove coordinate momento.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano associato alla funzione

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) - \epsilon[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

dove $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ sono variabili azione-angolo.

i) Completare le relazioni

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

ad una trasformazione canonica

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (J_1, J_2, \psi_1, \psi_2)$$

e scrivere il sistema hamiltoniano nelle nuove variabili.

- ii) Per tale sistema trovare due integrali primi indipendenti e in involuzione.
- iii) Mostrare che il sistema hamiltoniano definito da H soddisfa il principio della media per ogni $t \in \mathbb{R}$ dimostrando che le variabili azione I_1, I_2 non possono variare più di $4\sqrt{2}\epsilon$ durante l'intera evoluzione.