Compito di Meccanica Razionale

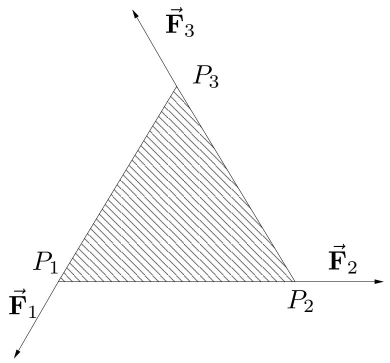
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

11 Aprile 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano orizzontale si consideri una lamina triangolare equilatera, omogenea di massa m, i cui lati hanno lunghezza ℓ. Ai vertici P_1, P_2, P_3 della lamina vengono applicate delle forze $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \vec{\mathbf{F}}_3$ di uguale intensità $F > 0$, parallele ai lati e orientate come in figura.



i) Mostrare che il sistema di forze applicate $\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_j, P_j)\}_{j=1,2,3}$ non è equilibrato.

ii) Quale è il numero minimo di forze applicate da aggiungere ad $\mathcal{F}$ per ottenere un sistema equilibrato? (motivare la risposta)

Si considerino adesso la lamina ed il sistema di forze $\mathcal{F}$ in un piano verticale.

iii) Trovare l'asse centrale relativo al sistema di forze esteso composto da $\mathcal{F}$ e dalla forza di gravità, assunta ortogonale al segmento P_1P_2.

Secondo Esercizio

Un corpo puntiforme di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$ ed

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}.$$

a) Tracciare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto, con coordinate $\rho, \dot{\rho}$.

b) Mostrare che esistono traiettorie circolari del moto e calcolarne il periodo al variare del momento angolare c.

Assumiamo che a un certo istante $\bar{t}$ si abbia

$$\rho(\bar{t}) = 2, \qquad \dot{\rho}(\bar{t}) = 0$$

e che il modulo della velocità sia uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

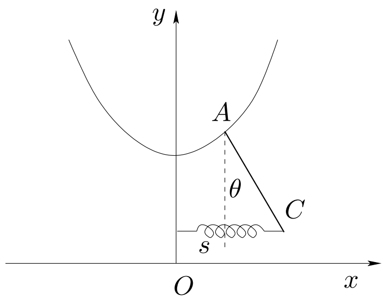
c) Mostrare che l'orbita nel piano delle fasi ridotto è periodica e calcolare i punti di inversione del moto di ρ.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico composto da un'asta omogenea AC di lunghezza 2ℓ e massa m. L'estremo A dell'asta può scivolare su una guida parabolica, di equazione

$$y = \frac{x^2}{2\ell} + 2\ell.$$

L'estremo C dell'asta è collegato all'asse Oy da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, che si mantiene sempre parallela all'asse Ox, vedi figura.



Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Assumiamo che valga la relazione

$$\frac{mg}{k\ell} = 1.$$

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto A e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale

i) scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema;

ii) trovare le configurazioni di equilibrio;

iii) studiare la stabilità degli equilibri trovati.

Soluzioni

Primo Esercizio

i) Fissiamo un riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ nel piano orizzontale, con l'origine nel punto medio di P_1P_2, $\hat{\mathbf{e}}_1$ orientato come P_2-P_1 e $\hat{\mathbf{e}}_2$ ortogonale ad essi, orientato verso P_3. Sia $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$.

Il momento risultante delle forze rispetto al polo P_1 è

$$\vec{\mathbf{N}}_{P_1} = (P_3 - P_1) \times \vec{\mathbf{F}}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} F\ell \hat{\mathbf{e}}_3 \neq \vec{\mathbf{0}},$$

quindi il sistema non può essere equilibrato.

ii) La risultante delle forze è

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 = \vec{\mathbf{0}},$$

quindi, se aggiungiamo una sola forza al sistema $\mathcal{F}$, sicuramente non otteniamo un sistema equilibrato. Per ottenere un sistema equilibrato basta aggiungere a $\mathcal{F}$ una coppia di forze di momento $-\vec{\mathbf{N}}_{P_1}$.

iii) L'accelerazione di gravità è $-g\hat{\mathbf{e}}_2$. Calcolo la risultante $\vec{\mathbf{R}}'$ ed il momento risultante $\vec{\mathbf{N}}'_{P_1}$ del sistema di forze

$$\mathcal{F}' = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1), (\vec{\mathbf{F}}_2, P_2), (\vec{\mathbf{F}}_3, P_3), (-mg\hat{\mathbf{e}}_2, B)\} :$$

dove B è baricentro della lamina, con

$$B - O = \frac{\ell}{2\sqrt{3}} \hat{\mathbf{e}}_2$$

$$\vec{\mathbf{R}}' = -mg\hat{\mathbf{e}}_2, \qquad \vec{\mathbf{N}}'_{P_1} = \vec{\mathbf{N}}_{P_1} + (B - P_1) \times (-mg\hat{\mathbf{e}}_2) = \Big[\frac{\sqrt{3}}{2}F - \frac{mg}{2}\Big]\ell\, \hat{\mathbf{e}}_3$$

L'asse centrale relativo a $\mathcal{F}'$ è la retta parallela a $\hat{\mathbf{e}}_2$ e passante per il punto Q_0 definito da

$$Q_0 - P_1 = \frac{\vec{\mathbf{R}}' \times \vec{\mathbf{N}}'_{P_1}}{|\vec{\mathbf{R}}'|^2} = \Big[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{mg}\Big]\ell\, \hat{\mathbf{e}}_1.$$

Secondo Esercizio

a) L'energia potenziale $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ è data da

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = V(\rho(\mathbf{x})), \quad V(\rho) = -\int f(\rho)d\rho = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}.$$

Indicando con c la componente ortogonale al piano del moto del momento angolare, l'energia potenziale efficace risulta

$$V^c_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^3} + \frac{c^2}{2\rho^2}.$$

Si vede che

$$\lim_{\rho\to+\infty} V^c_{\text{eff}}(\rho) = 0, \quad \lim_{\rho\to 0} V^c_{\text{eff}}(\rho) = +\infty.$$

Derivando si ottiene

$$\frac{dV^c_{\text{eff}}}{d\rho}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} - \frac{c^2}{\rho^3},$$

che si annulla solo se

$$\rho = \rho_* = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 12}}{2}. \tag{1}$$

Il grafico di $V^c_{\text{eff}}(\rho)$ ed il ritratto di fase sono mostrati nella figura 1.

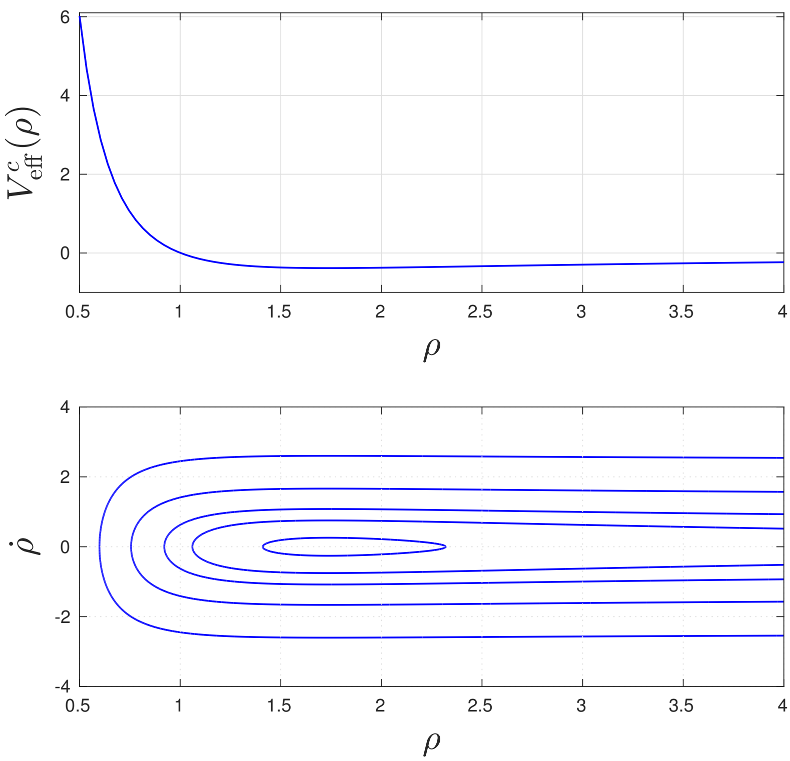


Figura 1: Grafico della funzione $V^c_{\text{eff}}(\rho)$ e ritratto di fase per alcuni valori dell'energia totale. Queste figure sono state ottenute con $c = 0.1$.

b) Le orbite circolari corrispondono ai punti di minimo dell'energia potenziale efficace. Di conseguenza il loro raggio è dato dalla formula (1). Dalla conservazione del momento angolare si ha

$$c = \rho^2 \dot{\theta},$$

quindi la velocità angolare dell'orbita circolare è

$$\dot{\theta}_{\mathrm{circ}} = \frac{c}{\rho_*^2}$$

ed il suo periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}_{\mathrm{circ}}|} = \frac{2\pi \rho_*^2}{|c|}.$$

c) Con i valori assegnati di $\rho(\bar{t})$, $\dot{\rho}(\bar{t})$ e del modulo della velocità $v(\bar{t})$ possiamo calcolare i valori di $|c|$ e dell'energia totale

$$E^c_{\mathrm{eff}}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V^c_{\mathrm{eff}}(\rho).$$

Si ha

$$|c| = \rho(\bar{t}) v(\bar{t}) = \sqrt{2}, \quad E = E^c_{\mathrm{eff}}(\rho(\bar{t}), \dot{\rho}(\bar{t})) = -\frac{1}{8}.$$

Poichè $E < 0$ si conclude che l'orbita deve essere periodica come si evince dalla figura 1. I due punti di inversione del moto di ρ sono definiti dalla relazione

$$E - V^c_{\mathrm{eff}}(\rho) = 0,$$

che è equivalente a

$$\rho^3 - 8\rho^2 + 8\rho + 8 = 0.$$

Notando che $\rho(\bar{t}) = 2$ è un punto di inversione possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$(\rho - 2)(\rho^2 - 6\rho - 4) = 0.$$

Quindi i punti di inversione sono

$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = 3 + \sqrt{13}.$$

Terzo Esercizio

i) Le coordinate della posizione e velocità del baricentro B dell'asta sono

$$x_B = s + \ell \sin\theta, \qquad y_B = \frac{s^2}{2\ell} + 2\ell - \ell\cos\theta,$$

$$\dot{x}_B = \dot{s} + \ell\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \dot{y}_B = \frac{s\dot{s}}{\ell} + \ell\dot{\theta}\sin\theta.$$

Usando il teorema di König si scrive l'energia cinetica come segue:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\Big[\Big(1 + \frac{s^2}{\ell^2}\Big)\dot{s}^2 + \frac{4}{3}\ell^2\dot{\theta}^2 + 2(\ell\cos\theta + s\sin\theta)\dot{s}\dot{\theta}\Big]. \end{aligned}$$

ii) L'energia potenziale è

$$V = mg\Big(\frac{s^2}{2\ell} + 2\ell - \ell\cos\theta\Big) + \frac{k}{2}(s + 2\ell\sin\theta)^2 = k\ell^2\Big[\frac{s^2}{2\ell^2} + 2 - \cos\theta + \frac{1}{2}\Big(\frac{s}{\ell} + 2\sin\theta\Big)^2\Big]$$

quindi le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni di

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= 2k(s + \ell\sin\theta) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= k\ell^2\sin\theta + k(s + 2\ell\sin\theta)2\ell\cos\theta = 0. \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$s = -\ell\sin\theta$$

e, sostituendo nella seconda,

$$k\ell^2\sin\theta(1 + 2\cos\theta) = 0.$$

Le configurazioni di equilibrio sono quindi

$$(s,\theta) = (0,0),\ (0,\pi),\ \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ell, \frac{2}{3}\pi\Big),\ \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell, \frac{4}{3}\pi\Big).$$

iii) Per studiare la stabilità degli equilibri calcolo le componenti della matrice hessiana V'' dell'energia potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} &= 2k, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial s} &= 2k\ell\cos\theta, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} &= k\ell^2\cos\theta + 2k\ell[-\sin\theta(s + 2\ell\sin\theta) + 2\ell\cos^2\theta]. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$V''(0,0) = \begin{bmatrix} 2k & 2k\ell \\ 2k\ell & 5k\ell^2 \end{bmatrix}, \qquad V''(0,\pi) = \begin{bmatrix} 2k & -2k\ell \\ -2k\ell & 3k\ell^2 \end{bmatrix},$$

$$V''\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ell, \frac{2}{3}\pi\Big) = V''\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell, \frac{4}{3}\pi\Big) = \begin{bmatrix} 2k & -k\ell \\ -k\ell & -k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

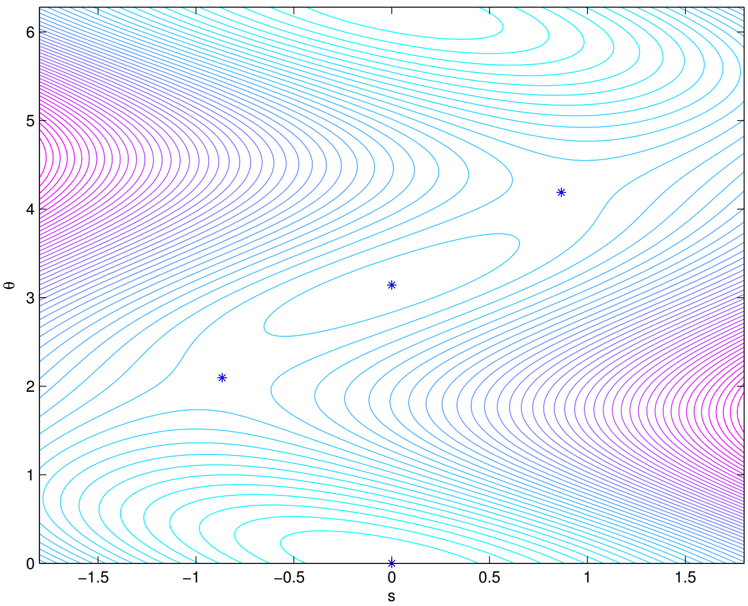


Figura 2: Curve di livello dell'energia potenziale V. Gli asterischi indicano le configurazioni di equilibrio.

Poiché i minori principali di $V''(0,0)$, $V''(0,\pi)$ sono positivi, per il teorema di Lagrange-Dirichlet le configurazioni $(s,\theta) = (0,0), (0,\pi)$ sono equilibri stabili. Invece le altre due configurazioni sono equilibri instabili perché

$$\det V''\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ell, \frac{2}{3}\pi\Big) = \det V''\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell, \frac{4}{3}\pi\Big) = -3k^2\ell^2 < 0.$$