

Compito di Meccanica Razionale

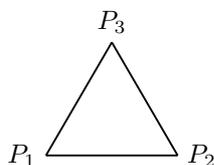
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

17 Luglio 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri il corpo rigido piano descritto in figura, formato da tre aste omogenee di lunghezza ℓ e massa m saldate tra loro agli estremi in modo da formare un triangolo equilatero di vertici P_1, P_2, P_3 .



- i) Trovare un riferimento principale di inerzia con origine in P_1 per il corpo rigido descritto in figura e calcolare i momenti principali di inerzia.
- ii) Dimostrare che il vettore $P_3 - P_1$ non è un autovettore dell'operatore di inerzia \mathcal{I}_{P_1} del corpo rigido.

Secondo Esercizio

Un corpo puntiforme di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

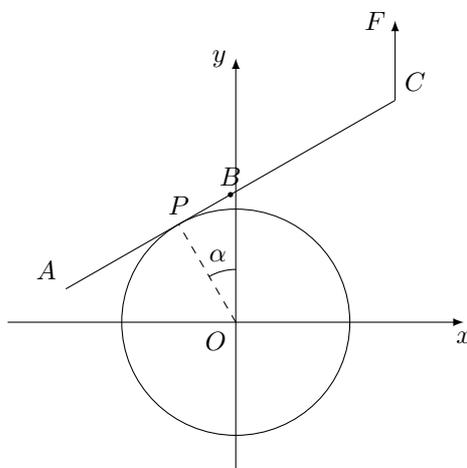
dove $\rho = |\mathbf{x}|$ ed

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho} + \alpha\rho, \quad \alpha > 0.$$

1. Tracciare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto, con coordinate $\rho, \dot{\rho}$, nei casi qualitativamente diversi che si presentano al variare del parametro α e della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto.
2. Studiare il numero di traiettorie circolari al variare dei parametri α, c e, nel caso $\alpha = 2, c = 1/4$, calcolarne il periodo.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa m , lunghezza 2ℓ ed estremi A, C . L'asta può rotolare senza strisciare su un disco di raggio $r = \frac{\ell}{\pi}$, che sta fermo in Σ e ha centro nell'origine O . Sull'asta agisce la forza di gravità, di accelerazione g e sull'estremo C agisce anche una forza di intensità costante $F = \frac{mg}{4}$, parallela all'asse Oy . Detto P il punto di contatto tra asta e disco, si usi come coordinata l'angolo $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ che il segmento OP forma con la direzione verticale (vedi figura). Si assuma inoltre che per $\alpha = 0$ il punto dell'asta appoggiato sul disco sia il suo baricentro B .



1. Calcolare la componente lagrangiana Q_α delle forze attive e usarla per scrivere l'equazione che caratterizza le configurazioni di equilibrio del sistema.
2. Ritrovare la condizione dell'equilibrio del punto precedente tramite l'energia potenziale delle forze attive.
3. Studiare la stabilità degli equilibri trovati.
4. Scrivere le equazioni di Lagrange per il moto dell'asta.
5. Calcolare la reazione vincolare esercitata dal disco sull'asta nel punto P negli equilibri trovati.

Soluzioni

Primo Esercizio

i) Sia M il punto medio del segmento P_2P_3 . Un riferimento principale con origine in P_1 ha gli assi lungo

$$\hat{e}_3 = \frac{(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)}{|(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)|}, \quad \hat{e}_1 = \frac{M - P_1}{|M - P_1|}, \quad \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times (M - P_1).$$

Sia inoltre $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ l'altezza del triangolo equilatero $P_1P_2P_3$. Calcoliamo i momenti principali di inerzia I_j relativi alle direzioni \hat{e}_j , $j = 1, 2, 3$. Dal teorema di Huygens-Steiner si ottiene

$$I_3 = 2\left(\frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4}\right) + \left(\frac{m\ell^2}{12} + mh^2\right) = \frac{3}{2}m\ell^2.$$

Sia $\lambda = \frac{m}{\ell}$ la densità di massa delle aste.

$$I_1 = \frac{m\ell^2}{12} + 2 \int_0^\ell \lambda(r \sin \frac{\pi}{6})^2 dr = \frac{1}{4}m\ell^2.$$

Dalla relazione $I_1 + I_2 = I_3$ si ottiene

$$I_2 = \frac{5}{4}m\ell^2.$$

ii) Definisco i versori ortonormali $\hat{e}'_1 = \frac{(P_3 - P_1)}{|P_3 - P_1|}$, $\hat{e}'_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}'_1$. Noto che

$$\hat{e}'_1 = \cos(\pi/6)\hat{e}_1 + \sin(\pi/6)\hat{e}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\hat{e}_1 + \hat{e}_2),$$

$$\hat{e}'_2 = -\sin(\pi/6)\hat{e}_1 + \cos(\pi/6)\hat{e}_2 = \frac{1}{2}(-\hat{e}_1 + \sqrt{3}\hat{e}_2).$$

Se $P_3 - P_1$ fosse un autovettore di \mathcal{J}_{P_1} si dovrebbe avere

$$\hat{e}'_1 \cdot \mathcal{J}_{P_1} \hat{e}'_2 = 0.$$

Invece si ha

$$\hat{e}'_1 \cdot \mathcal{J}_{P_1} \hat{e}'_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \cdot \mathcal{J}_{P_1} \frac{1}{2}(-\hat{e}_1 + \sqrt{3}\hat{e}_2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(I_2 - I_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}m\ell^2 \neq 0. \quad (1)$$

Nella (1) abbiamo usato

$$\hat{e}_1 \cdot \mathcal{J}_{P_1} \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \cdot \mathcal{J}_{P_1} \hat{e}_1 = 0$$

e

$$\hat{e}_1 \cdot \mathcal{J}_{P_1} \hat{e}_1 = I_1, \quad \hat{e}_2 \cdot \mathcal{J}_{P_1} \hat{e}_2 = I_2.$$

Secondo Esercizio

1. L'energia potenziale efficace è

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \log \rho - \alpha \frac{\rho^2}{2} + \frac{c^2}{2\rho^2} \quad (\rho > 0).$$

Inoltre

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = -\infty.$$

Calcoliamo i punti stazionari di \mathcal{V}_{eff} . Si ha

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{\rho} - \alpha\rho = \frac{c^2}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^3}(\rho^2 - \alpha\rho^4 + c^2),$$

quindi $\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ se e solo se

$$\rho^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha c^2}}{2\alpha}.$$

Per avere soluzioni reali deve valere

$$4\alpha c^2 \leq 1.$$

Se $4\alpha c^2 < 1$ l'energia potenziale efficace ha i due punti stazionari

$$\rho_- = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha c^2}}{2\alpha}}, \quad \rho_+ = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha c^2}}{2\alpha}},$$

che corrispondono ad un minimo e un massimo locale di \mathcal{V}_{eff} rispettivamente (vedi figura 1).

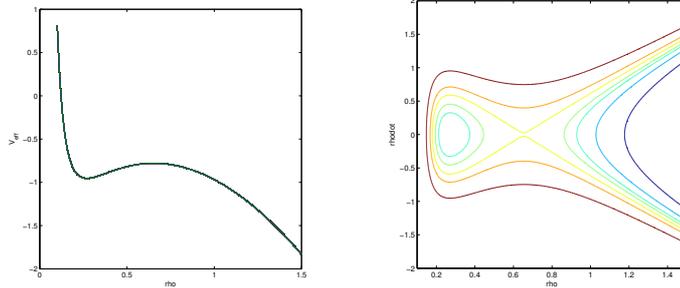


Figura 1: Caso con 2 punti stazionari di \mathcal{V}_{eff} . $\alpha = 2, c = 1/4$.

Se $4\alpha c^2 = 1$ l'energia potenziale efficace ha un solo punto stazionario, che è un flesso a tangente orizzontale (vedi figura 2).

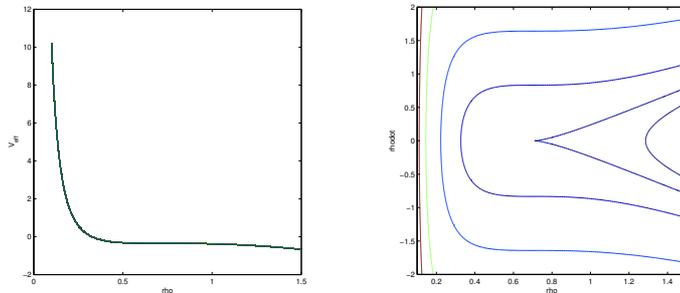


Figura 2: Caso con 1 punto stazionario di \mathcal{V}_{eff} . $\alpha = 1, c = 1/2$.

Se $4\alpha c^2 > 1$ l'energia potenziale efficace non ha punti stazionari ed è una funzione decrescente di ρ sulla semiretta positiva (vedi figura 3).

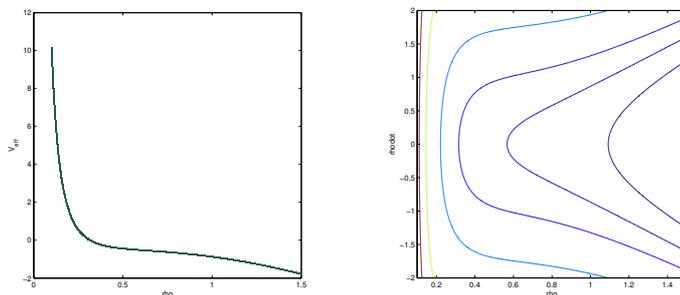


Figura 3: Caso con nessuno punto stazionario di \mathcal{V}_{eff} . $\alpha = 2, c = 1/2$.

2. Ci sono tante orbite circolari quanti punti stazionari di \mathcal{V}_{eff} sulla semiretta $\rho > 0$. Nel caso $\alpha = 2, c = 1/4$ ci sono 2 traiettorie circolari, di periodi

$$T_1 = \frac{2\pi}{|c|} \rho_-^2 = \sqrt{2}\pi(\sqrt{2} - 1), \quad T_2 = \frac{2\pi}{|c|} \rho_+^2 = \sqrt{2}\pi(\sqrt{2} + 1).$$

Terzo Esercizio

Le coordinate del baricentro B dell'asta sono

$$x_B = r(-\sin \alpha + \alpha \cos \alpha), \quad y_B = r(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha)$$

e quelle del punto C sono

$$x_C = x_B + \ell \cos \alpha, \quad y_C = y_B + \ell \sin \alpha.$$

1. La componente lagrangiana delle forze attive è data da

$$Q_\alpha = (F - mg)r\alpha \cos \alpha + F\ell \cos \alpha.$$

Gli equilibri sono caratterizzati dalla condizione $Q_\alpha = 0$. Usando $\ell = \pi r$ ed $F = mg/4$ si ottiene

$$\frac{mgr}{4} \cos \alpha (\pi - 3\alpha) = 0. \quad (2)$$

2. L'energia potenziale delle forze attive è

$$V(\alpha) = (mg - F)r(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - F\ell \sin \alpha = \frac{3}{4}mgr(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - \frac{mg}{4}\pi r \sin \alpha.$$

Gli equilibri sono caratterizzati dall'equazione

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}(\alpha) = \frac{3}{4}mgr\alpha \cos \alpha - \frac{mg}{4}\pi r \cos \alpha = 0,$$

che corrisponde a (2).

3. Nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ abbiamo l'unica configurazione di equilibrio

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Calcoliamo la derivata seconda dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}(\alpha) = \frac{3}{4}mgr(\cos \alpha - \alpha \sin \alpha) + \frac{mg}{4}\pi r \sin \alpha.$$

Valutando questa espressione nell'equilibrio si ottiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{8} mgr > 0,$$

per cui l'equilibrio è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

4. La velocità del baricentro è data da

$$\dot{x}_B = -r\alpha \sin \alpha \dot{\alpha}, \quad \dot{y}_B = r\alpha \cos \alpha \dot{\alpha}.$$

La velocità angolare dell'asta è $\vec{\omega} = \dot{\alpha} \hat{e}_3$. Usando il teorema di König si ottiene l'espressione dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} mr^2 \alpha^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} mr^2 \left(\alpha^2 + \frac{\pi^2}{3} \right) \dot{\alpha}^2.$$

Le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \tag{3}$$

dove $L = T - V$ è la funzione di Lagrange. In questo caso l'equazione (3) si scrive

$$mr^2 \left[\alpha \dot{\alpha}^2 + \left(\alpha^2 + \frac{\pi^2}{3} \right) \ddot{\alpha} \right] = \frac{mg}{4} r \cos \alpha (\pi - 3\alpha).$$

5. Scrivo la prima equazione cardinale all'equilibrio:

$$-mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_2 + \Phi_1 \hat{e}_1 + \Phi_2 \hat{e}_2 = \vec{0},$$

da cui si ottiene

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = mg - F = \frac{3}{4} mg.$$