Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
15 Novembre 2018
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}(\dot q^2 + q^2 - q), \qquad q,\dot q \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar\gamma(0) = 1, \qquad \dot{\bar\gamma}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar\gamma$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T],\mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot\gamma_\alpha(0) = \alpha.$$

iv) Scrivere le equazioni di Carathéodory e calcolare la funzione iconale $S(q,t)$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{8}|\mathbf{q}|^2 + \frac{1}{2}(p_1q_2 - q_1p_2),$$

con $\mathbf{p} = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Completare le relazioni

$$q_1 = Q_2\cos Q_1,$$
$$q_2 = Q_2\sin Q_1$$

ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \xrightarrow{\mathbf{\Psi}} (\mathbf{P},\mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{P} = (P_1,P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1,Q_2) \in S^1 \times \mathbb{R}^+$, usando una funzione generatrice $S(\mathbf{q},\mathbf{P})$ omogenea di grado 1 nelle $\mathbf{P}$ e scrivere la funzione di Hamilton nelle variabili $\mathbf{P},\mathbf{Q}$.

ii) Trovare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale hamiltoniano X_H.

iii) Mostrare che le coordinate polari (Q_1,Q_2) sono variabili separabili per l'equazione di Hamilton-Jacobi associata a $K = H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$.