

# Compito di Meccanica Razionale

19 luglio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

## Primo Esercizio

Un punto materiale di massa unitaria si muove in un campo di forze centrali

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho, \quad f(\rho) = 6\rho^5 - 2\alpha\rho$$

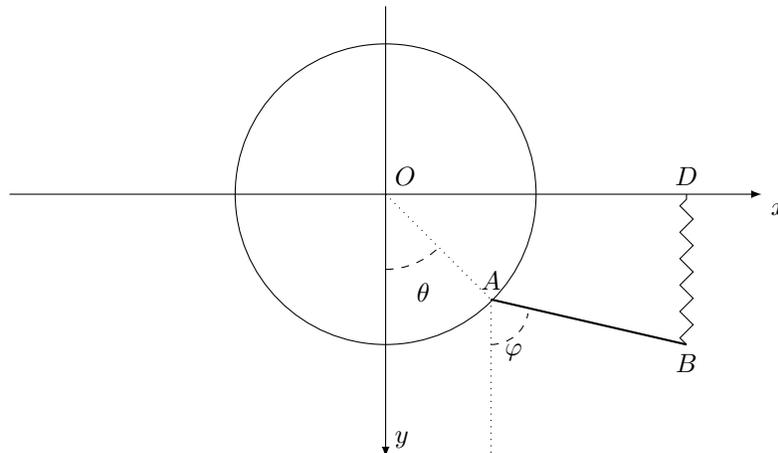
dove  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\rho$  è la distanza del punto dal centro di forza.

- Studiare qualitativamente il moto del punto materiale, analizzando i casi che si presentano al variare del parametro reale  $\alpha$  e della posizione e velocità iniziali  $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$  del punto.
- Discutere l'esistenza di orbite circolari e in caso affermativo trovare il periodo del moto.

## Secondo Esercizio

In un piano verticale un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $l$  ha l'estremo  $A$  vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida circolare di raggio  $R$ . All'altro estremo dell'asta è collegata una molla di costante elastica  $k > 0$  che si mantiene sempre verticale. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Siano  $\theta, \varphi$  gli angoli che  $OA$  e l'asta formano con la verticale.

- Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- Calcolare le configurazioni di equilibrio.
- Posto  $J = \frac{mg}{k(R+l)}$ , discutere la stabilità della configurazione  $(\theta, \varphi) = (0, 0)$  al variare di  $J \neq 1, 2$ .
- Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni relativa alla configurazione  $(\theta, \varphi) = (0, 0)$  nel caso  $J = 4$ .



### Terzo Esercizio

Si consideri un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  e si fissi su di esso un sistema di riferimento come illustrato in figura. Un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  può rotolare senza strisciare su tale piano. Un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $l$  è appesa ad un punto  $Q$  del bordo del disco. Al baricentro  $B$  del disco è attaccato un estremo di una molla di costante elastica  $k$  che resta sempre parallela al piano inclinato. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Sia  $D$  il punto di contatto tra il disco e il piano. Si scelgano come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  di  $D$  e l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione ortogonale al piano.

Supponendo che per  $s = 0$  i punti  $Q$  e  $D$  coincidano e la molla si trovi a riposo, determinare le equazioni del moto mediante le equazioni cardinali.

