Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
15 Novembre 2019
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = -\frac{1}{1+q} - \frac{1}{1-q},$$

con $-1 < q < 1$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Consideriamo la soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma(0) = 0, \qquad \dot{\gamma}(0) = 2.$$

Mostrare che $\gamma(t)$ è monotona crescente e trovare gli estremi t_1, t_2 del suo intervallo massimale di definizione.

ii) Mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < t_2$, la soluzione $\gamma(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$.

iii) Calcolare la funzione eccesso di Weierstrass per L e mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < t_2$, la soluzione $\gamma(t)$ è anche un minimo forte per il funzionale $\mathcal{A}$ nella classe $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q},t) = (1+t^2)^2\left(|\mathbf{p}|^2 - \frac{|\mathbf{q}|^2}{q_1^2 q_2^2}\right) + \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{q},$$

con $\mathbf{p} = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1,q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $t \in \mathbb{R}$.

i) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$(\mathbf{p},\mathbf{q},t) \overset{\Psi}{\to} (\mathbf{P},\mathbf{Q},t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1,P_2)$, $\mathbf{Q} = (Q_1,Q_2)$, è la trasformazione canonica univalente dipendente dal tempo definita dalla funzione generatrice

$$S(\mathbf{q},\mathbf{P},t) = \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{P}}{1+t^2}.$$

ii) Calcolare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla nuova hamiltoniana K.