Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 dicembre 2021

Esercizio 1. Si considerino le due funzioni hamiltoniane

$$H_1 = p_1 q_2 - p_2 q_1, \qquad H_2 = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q},$$

dove $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Calcolare i flussi integrali Φ_1^t, Φ_2^t delle equazioni di Hamilton associate ad H_1 e H_2.

ii) Mostrare che i flussi Φ_1^t, Φ_2^t commutano.

iii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per ciascuno dei sistemi hamiltoniani definiti da H_1 e H_2.

Esercizio 2. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + 2\varepsilon[\sin 2\varphi_1 \cos \varphi_2 + I_1^2 \cos^2(2\varphi_1 - \varphi_2)],$$

dove $I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ sono variabili azione-angolo e $(\omega_1, \omega_2) \neq (0, 0)$.

Usare, quando è possibile, il metodo di Lie per trovare una la funzione generatrice χ di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}}{\to} (\tilde{\boldsymbol{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ε. Scrivere inoltre al primo ordine in ε la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.