Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2021

Esercizio 1
Si consideri la hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{t}{2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2t}(|\mathbf{q}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Completare le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1^2}{2t}, \qquad Q_2 = \frac{q_2^2}{2t}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ.

ii) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K.

iii) Determinare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale X_H.

Esercizio 2
Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = q^2 \log q$$

con $q > 0$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L.

ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = e^{-1/2}, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(0) = (1/e - 1/3)^{1/2}$$

è una funzione periodica tale che

$$\bar{\gamma}(t) > 1/e, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) Mostrare che esiste un valore τ_* del tempo t per cui $\bar{\gamma}(t)$ non può essere un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^{\tau_*} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$