Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
18 febbraio 2022

Esercizio 1 Si consideri la lagrangiana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - y.$$

i) Trovare la soluzione $[0,1] \ni t \mapsto \bar{\gamma}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni al bordo

$$\bar{\gamma}(0) = (0,0), \qquad \bar{\gamma}(1) = (1,0) \tag{1}$$

e calcolarne il valore dell'energia $\bar{e}$.

ii) Scrivere l'espressione del funzionale di Maupertuis, definito sulla classe $\Gamma_{\bar{e}}$ delle curve variate asincrone, il cui grafico si può scrivere nella forma $(x, y(x))$, con gli stessi estremi (1) e la stessa energia $\bar{e}$ di $\bar{\gamma}$. Scrivere inoltre il funzionale nella forma

$$\mathcal{J}_L(\gamma) = \int_0^1 f(y(x); \bar{e})\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

per una qualche funzione f.

iii) Trovare l'espressione dell'arco rettilineo $t \mapsto \widetilde{\gamma}(t) = (\widetilde{x}(t), 0) \in \Gamma_{\bar{e}}$ che congiunge il punto $(0,0)$ al punto $(1,0)$ e che ha energia $\bar{e}$.

iv) Mostrare che si ha

$$\mathcal{J}_L(\bar{\gamma}) < \mathcal{J}_L(\widetilde{\gamma}).$$

Esercizio 2
Si consideri la trasformazione di coordinate $(p, q, t) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (P, Q, t)$ definita da

$$P = 2e^t\sqrt{pq}\log p,$$
$$Q = e^{-t}\sqrt{pq},$$

sull'insieme $\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p, q > 0\}$.

i) Dimostrare che la trasformazione $\mathbf{\Psi}$ è completamente canonica.

ii) Estendere $\mathbf{\Psi}$ ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso.

iii) Determinare come si trasforma la hamiltoniana $H(p, q) = pq$ tramite $\mathbf{\Psi}$.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = \frac{1}{2}(aI_1^2 + bI_2^2) + \varepsilon\cos(3\varphi_1 - 2\varphi_2), \qquad \varepsilon \ll 1,$$

con $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$.

i) Determinare la condizione che a e b devono soddisfare affinchè esistano nel sistema dei moti che non soddisfano il principio della media. Scrivere inoltre questi particolari moti.

ii) Posto $a = 1$, $b = -2$, mostrare che I_1, I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ attorno a dei valori costanti.