Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Giugno 2022

Esercizio 1
Sia

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \overset{\boldsymbol{\Psi}}{\mapsto} (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$$

una trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^{2n}$, con $n \geq 1$, dove

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \boldsymbol{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n), \quad \boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

sono vettori di $\mathbb{R}^n$.

1. Posto

   $$\tilde{\boldsymbol{x}} = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n), \qquad \tilde{\boldsymbol{y}} = (P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_n, Q_n)$$

   e

   $$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 \\ O_2 & \dots & O_2 & J_2 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   mostrare che la trasformazione $\boldsymbol{\Psi}$ è simplettica con valenza 1 se e solo se vale la relazione

   $$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \tilde{J} \left[\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \right]^T = \tilde{J}.$$

   Suggerimento: usare la matrice ortogonale

   $$S = [\boldsymbol{e}_1 | \boldsymbol{e}_{n+1} | \boldsymbol{e}_2 | \boldsymbol{e}_{n+2} | \dots | \boldsymbol{e}_n | \boldsymbol{e}_{2n}]^T$$

   dove gli $\boldsymbol{e}_j$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$.

2. Si consideri per semplicità il caso $n = 2$ e si definiscano le matrici

   $$M_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} \qquad 1 \leq i, j \leq 2.$$

   Mostrare che valgono le relazioni

   $$M_{11} + M_{21} = M_{12} + M_{22} = 1.$$

Esercizio 2
Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + \omega^2 q_2^2) + \varepsilon q_1^2 q_2$$

con $\omega \neq 0$.

1. Mostrare che la dinamica associata alla hamiltoniana H_0 ottenuta da H ponendo $\varepsilon = 0$ è integrabile.

2. Introdurre variabili azione-angolo per H_0 attraverso la trasformazione

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Phi} (I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$$

e scrivere la nuova hamiltoniana

$$K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Phi^{-1}.$$

3. Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}} (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ al primo ordine in ε. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al secondo ordine in ε incluso.