Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
27 gennaio 2022

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 + q\dot q - q\sin t, \qquad q,\dot q \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar\gamma(0) = 1, \qquad \dot{\bar\gamma}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar\gamma$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T],\mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot\gamma_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2
Si consideri un punto materiale P di massa m che si muove nello spazio soggetto al campo di forze derivabile dall'energia potenziale

$$V(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2} - Fz,$$

con $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ coordinate di P rispetto ad un sistema di riferimento fissato, e $k > 0$, $F > 0$ parametri reali.

i) Si dimostri che le coordinate cilindriche $(r,z,\varphi) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$ sono separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi di questo sistema meccanico.

ii) Trovare un integrale completo di tale equazione.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3, \\ f(I,\varphi) &= 2I_1[I_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos\varphi_3 + I_3\sin(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1,I_2,I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_1,\omega_2,\omega_3 \neq 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ.