# Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
## 12 Settembre 2023
### (usare fogli diversi per esercizi diversi)

**Esercizio 1.** Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + q^2 + q\cos t, \qquad q, \dot{q} \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L$ con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = 1, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar{\gamma}$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0, T], \mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t, q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L$ con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha.$$

**Esercizio 2.** Trovare variabili azione-angolo $(I, \varphi)$ per l'oscillatore armonico unidimensionale, definito dall'equazione differenziale

$$m\ddot{x} + kx = 0, \qquad m, k > 0.$$

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3, \\ f(I, \varphi) &= I_1 I_2[\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ i = 1, 2, 3, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in $\epsilon$. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in $\epsilon$ nel caso $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 3$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in $\epsilon$.