Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2022

Esercizio 1
Si consideri l'equazione di Newton

$$m\ddot{X} = -k\frac{X}{|X|^3}, \qquad k > 0,$$

dove $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ sono le coordinate di un punto materiale di massa m che si muove su un piano.

i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nelle coordinate polari $(q, \theta) \in (\mathbb{R}^+, S^1)$ definite sul piano del moto.

Assumendo che $m = 1$,

ii) mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t) = (\bar{q}(t), \bar{\theta}(t))$ di tali equazioni con condizioni iniziali

$$q(0) = 2, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{k}{6}}$$

è periodica;

iii) mostrare che per ogni tempo $\tau > 0$, $\bar{q}(t)$ è un minimo debole del funzionale

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}} = \int_0^\tau \tilde{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t))dt$$

dove $\tilde{L}(q, \dot{q})$ è la lagrangiana che si ottiene "eliminando" la coordinata θ nelle equazioni.

Esercizio 2

1. Data una funzione di quattro variabili scalari $S(q_1, q_2, P_1, Q_2)$ tale che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial(q_1, q_2)\partial(P_1, Q_2)} \neq 0$$

su tutto il dominio considerato, mostrare che le relazioni

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \quad P_2 = \frac{\partial S}{\partial Q_2}$$

definiscono localmente una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_1) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2).$$

2. Completare le relazioni

$$P_1 = q_1 p_2 - q_2 p_1, \qquad Q_2 = q_1 p_1 + q_2 p_2$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_1) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

definita su $p_1, p_2, q_1, q_2 > 0$, utilizzando una funzione generatrice S dello stesso tipo del punto precedente.[1]

[1] *Suggerimento:* si ricordi la relazione $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, valida per ogni $x > 0$.

3. Trovare la soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{4}\log^2(q_1^2 + q_2^2) + q_1(p_1 + p_2) - q_2(p_1 - p_2)$$

e con condizioni iniziali

$$p_1(0) = p_2(0) = q_1(0) = q_2(0) = 1.$$