Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Dicembre 2022

Esercizio 1 Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - p_1 p_2 - q_1 q_2,$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Determinare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$.

ii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da H.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

Esercizio 2 Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3, \\ f(I, \varphi) &= I_1 I_2[\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ i = 1, 2, 3, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \stackrel{\Psi_\epsilon}{\to} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 3$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ.