Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
3 Febbraio 2023
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Data la funzione di Lagrange

$$L(q,\dot q)=\frac{1}{2}\dot q^2-V(q),\quad V(q)=\log q,\qquad\qquad q\in\mathbb{R}^+,\dot q\in\mathbb{R}$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q,\dot q)$ con condizioni iniziali

$$q(0)=1,\qquad \dot q(0)=0.$$

Mostrare che la soluzione $\gamma(t)$ per ogni tempo $0<\tau<t_2$, con t_2 estremo superiore del suo intervallo massimale di definizione, è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma)=\int_0^\tau L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2)=\frac{1}{2}\big(p_1^2+p_2^2\big)-\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}},$$

con $(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$ e $(q_1,q_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

i) Determinare una trasformazione canonica

$$(p_1,p_2,q_1,q_2)\stackrel{\Psi}{\to}(P_1,P_2,Q_1,Q_2),$$

tale che le nuove coordinate Q_1, Q_2 siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K=H\circ\Psi^{-1}$.

Date le condizioni iniziali

$$p_1(0)=0,\quad p_2(0)=1,\quad q_1(0)=\sqrt{2},\quad q_2(0)=-\sqrt{2},$$

ii) scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K;

iii) calcolare il valore minimo assunto da $q_1^2+q_2^2$ lungo il moto.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi})=h(\mathbf{I})+\epsilon f(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}),$$

dove

$$\begin{aligned}h(\mathbf{I})&=I_1\omega_1+I_2\omega_2+I_3\omega_3,\\ f(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi})&=2\epsilon I_1[I_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos\varphi_3+I_3\sin(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3)],\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{I}=(I_1,I_2,I_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\in\mathbb{T}^3,\quad \omega_1,\omega_2,\omega_3\neq 0,\quad 0<\epsilon\ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (2, 1, 1)$$

e determinare le combinazioni lineari delle azioni che si conservano trascurando i termini di ordine ϵ^2 nella forma risonante.