Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
Laurea Magistrale in Matematica
13 Settembre 2024

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = -\frac{1}{q^2} - q^2,$$

con $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange relativa a L e tracciare il suo ritratto di fase.

ii) Si consideri la soluzione $t \mapsto \gamma_1(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_1(0) = 1, \qquad \dot{\gamma}_1(0) = 2.$$

Mostrare che l'intervallo massimale destro di γ_1 è $[0, +\infty)$.

iii) Mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < +\infty$, la soluzione $\gamma_1(t)$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau))dt \tag{1}$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + q_1 q_2,$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Estendere le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1 - q_2}{2}, \qquad Q_2 = \frac{q_1 + q_2}{2},$$

ad una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

sul dominio di H. Scrivere inoltre la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare due integrali primi per il campo vettoriale associato ad H in involuzione ed indipendenti tra loro.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

iv) Scrivere la soluzione del sistema hamiltoniano per H in corrispondenza delle condizioni iniziali $p_1(0) = q_1(0) = 2$, $p_2(0) = q_2(0) = 1$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon \left[\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin^2(\varphi_2 - 2\varphi_3)\right]$$

con $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $\varepsilon \ll 0$. Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ε nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ε.